Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

Enric Monsó

José M. Moreno

Miquel Noguera

María Jesús Pérez

Julian Pfeifle

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
Colom 11
08222 Terrassa

rafel.amer@upc.edu

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Índex

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

1 Matrius i sistemes d'equacions lineals

Matrius

Definició 1.1 Una *matriu de m files i n columnes amb coeficients reals* és una taula rectangular de nombres reals. La posició de cada coeficient de la matriu queda determinat per un parell de nombres (i, j), que ens indiquen la seva fila i la seva columna.

És habitual representar una matriu A com

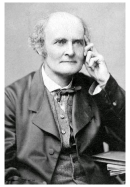
$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

posant el coeficient a_i^j a la fila i i la columna j. Es diu que A és una *matriu del tipus $m \times n$*.
El conjunt de totes del matrius del tipus $m \times n$ es representa per $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Cal destacar les *matrius quadrades d'ordre n* o $n \times n$, *matrius fila* o $1 \times n$ i les *matrius columna* o $m \times 1$.

La *matriu unitat*, representada per I (per ser estrictes l'hauríem de representar per I_n), és la matriu quadrada d'ordre n que compleix

$$a_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j\,. \end{cases}$$

Definició 1.2 La *matriu transposada* d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ és la matriu $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ de coeficients $b_i^j = a_j^i$.


Arthur Cayley

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.3 És immediat veure com s'escriu la transposada d'una matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Rang d'una matriu

La fila A_i de la matriu A **és combinació lineal** de les files $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ si existeixen coeficients $t_1, t_2, \ldots, t_k$ tals que

$$A_i = t_1 A_{j_1} + t_2 A_{j_2} + \cdots + t_k A_{j_k}\,.$$

Les files $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ són **linealment independents** si cap d'elles és combinació lineal de les altres. En cas contrari, són **linealment dependents**.

Exemple 1.4 Si volem saber si la segona fila de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 11 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

és combinació lineal de la primera i la tercera, hem de veure si podem escriure

$$A_2 = t_1 A_1 + t_2 A_3\,,$$

és a dir,

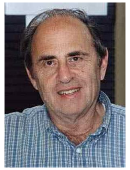
$$\begin{pmatrix} -6 & 11 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si igualem terme a terme, obtenim les equacions

$$\left.\begin{aligned} 2t_1 - 3t_2 &= -6 \\ t_1 + 2t_2 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

i, en resoldre aquest sistema, obtenim $t_1 = 3$ i $t_2 = 4$. Per tant, la segona fila és combinació lineal de la primera i la tercera, ja que $A_2 = 3A_1 + 4A_3$. En conseqüència, les tres files són linealment dependents i tenim entre elles una relació de dependència

$$3A_1 - A_2 + 4A_3 = 0$$


Paul Joseph Cohen

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 1.5 El *rang per files d'una matriu* és el seu màxim nombre de files linealment independents.

De manera semblant es defineixen el conceptes de combinació lineal de columnes, columnes linealment independents i rang per columnes d'una matriu.

També poden dir que una equació és combinació lineal d'unes altres o que unes quantes equacions són linealment dependents o independents.

Teorema 1.6 *Els rangs per files i per columnes d'una matriu coincideixen. Aquest nombre s'anomena* ***rang de la matriu*** *i és igual al nombre de pivots que s'obtenen en triangular la matriu.*

El **mètode de Gauss** consisteix a fer transformacions elementals per files fins a obtenir una matriu triangulada. Recordem que les transformacions elementals són les següents:

(a) Permutar dues files.

(b) Multiplicar un fila per un nombre diferent de zero.

(c) Substituir una fila per aquesta mateixa fila més (o menys) un múltiple d'una altra.

Recordem també que una matriu està triangulada si compleix les condicions següents:

(a) Les files amb tots els coeficients nuls són les últimes.

(b) Els primers coeficients no nuls de cada fila, anomenats *pivots*, estan a la dreta dels pivots de les files anteriors.

Això implica que els coeficients situats per sota dels pivots ha de ser zero.


John Wallis

Proposició 1.7 *Tota matriu es pot triangular mitjançant transformacions elementals per files. En aquest procés, el rang de les matrius és sempre el mateix.*

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.8 Calculem el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Triangulem la matriu pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}_{F_3 \sim F_3 - 2F_2} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que la matriu triangulada té dos pivots, $\text{rang}(A) = 2$.

Operacions amb matrius

Definició 1.9 En cada un dels conjunts $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es defineixen dues operacions internes: la **suma**, on $S = A + B$ és la matriu donada per

$$s_i^j = a_i^j + b_i^j$$

i el **producte per un nombre real**, on $P = tA$ és la matriu donada per

$$p_i^j = t a_i^j\,,$$

amb $t \in \mathbb{R}$.

Les propietats essencials d'aquestes operacions són les següents:

- Associativa de la suma: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Commutativa de la suma: $A + B = B + A$.
- Element neutre de la suma: existeix una matriu 0 tal que $A + 0 = A$ per a tota A.
- Element oposat: per a cada matriu A, existeix una matriu $-A$ tal que $A + (-A) = 0$.


John von Neumann

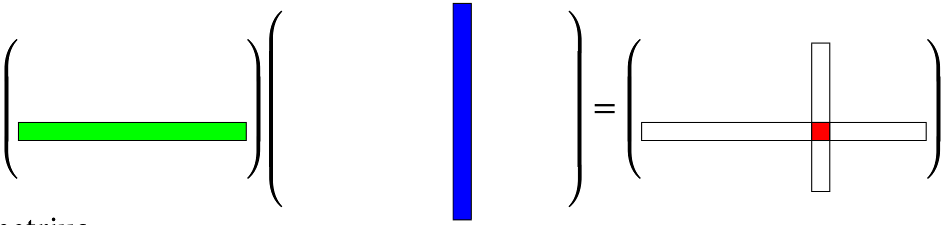
Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

- Distributiva del producte per a la suma de matrius: $t(A + B) = tA + tB$.
- Distributiva del producte per a la suma de nombres: $(t + s)A = tA + sA$.
- Associativitat dels productes: $(ts)A = t(sA)$.

Definició 1.10 *Multiplicació de matrius*: si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, el seu **producte** és la matriu $P = AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ definida per les fórmules

$$p_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_i^k\, b_k^j = a_i^1 b_1^j + a_i^2 b_2^j + \cdots + a_i^n b_n^j\,.$$

El coeficient p_i^j de la matriu producte s'obté multiplicant "escalarment" la fila i de la matriu A per la columna j de la matriu B. Esquemàticament



Exemple 1.11 Producte de dues matrius

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-2)+1\cdot 3+3\cdot 5-4\cdot 2 & -2\cdot 1+1\cdot(-4)+3\cdot(-1)-4\cdot(-3) \\ 2\cdot(-2)+3\cdot 3+1\cdot 5+0\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot(-4)+1\cdot(-1)+0\cdot(-3) \\ 5\cdot(-2)-2\cdot 3+3\cdot 5+1\cdot 2 & 5\cdot 1-2\cdot(-4)+3\cdot(-1)+1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 10 & -11 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Proposició 1.12 *Quan són factibles els productes que hi intervenen, es compleixen les propietats següents:*

(a) Associativa: $A(BC) = (AB)C$.

(b) Distributives: $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$.

(c) Compatibilitat: $(tA)B = t(AB) = A(tB)$.

Shing-Tung Yau

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

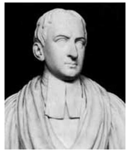
Siguin A i B dues matrius tals que $C = AB$ i, a més, A té m files i n columnes i B té n files i p columnes. Aleshores

- Les columnes de C són combinació lineal de les columnes de la matriu A. Més concretament, la columna j de C es pot escriure com
$$C^j = b_1^j A^1 + b_2^j A^2 + \cdots + b_n^j A^n \,.$$
- Les files de C són combinació lineal les files de la matriu B. Més concretament, la fila i de C es pot escriure com
$$C_i = a_i^1 B_1 + a_i^2 B_2 + \cdots + a_m^1 B_m \,.$$

Exemple 1.13 En el producte de matrius
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 10 & -11 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$
és fàcil observar que
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
i que
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proposició 1.14 *Donades dues matrius A i B tals que es pot calcular el producte AB, aleshores*
$$\mathrm{rang}(AB) \le \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}\,.$$

Si A és una matriu amb m files i n columnes i I_m i I_n són les matrius unitat d'ordres m i n, respectivament, és immediat que es compleix
$$I_m A = A I_n = A\,.$$


Roger Cotes

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Gaspard Monge

Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observem que es compleix

$$AB \neq BA \qquad \text{i} \qquad AC = 0 \qquad \text{amb } A \neq 0 \text{ i } C \neq 0.$$

A més, d'una igualtat matricial $AX = AY$ no es pot deduir que $X = Y$, encara que sigui $A \neq 0$ i $A(X - Y) = 0$.

Proposició 1.15 *La transposició de matrius compleix que*

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Definició 1.16 Una matriu quadrada A és **simètrica** si $A^t = A$ i és **ortogonal** si $A^t A = I$.

Sistemes d'equacions lineals

Definició 1.17 Un *sistema d'equacions lineals* és una col·lecció d'equacions de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n & = & b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

on els *coeficients* a_i^j, els *termes independents* $b_1, b_2, \dots, b_m$ i els valors que han de prendre les *incògnites* $x_1, x_2, \dots, x_n$ són nombres reals.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Una *solució* del sistema d'equacions anterior és una col·lecció de nombres

$$x_1 = \alpha_1\,, \quad x_2 = \alpha_2 \quad \cdots \quad x_n = \alpha_n$$

que compleixen **totes** les igualtats del sistema.

Un sistema és *compatible* si admet alguna solució (una o més), i és *incompatible* si no n'admet cap. Un sistema compatible és *determinat* si només admet una solució, i és *indeterminat* si en té més d'una (això voldrà dir que en té infinites).

En el cas que el sistema sigui compatible indeterminat, la *solució general* del sistema consistirà en posar algunes de les incògnites (*incògnites principals*) en funció de les altres (*incògnites secundàries o paràmetres*).
Donant valors als paràmetres obtenim solucions del sistema d'equacions que, en aquest cas, en direm *solucions particulars*.

Habitualment, representarem aquest sistema d'equacions lineals en forma de matriu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ & \ldots\ldots & & & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n & b_m \end{array}\right).$$

Observació 1.18 Tot sistema d'equacions lineals es pot representar matricialment en la forma

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ & \ldots\ldots & & \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

és a dir, com a equació $AX = B$, on A és la matriu dels coeficients de les incògnites i B és la columna de termes independents.

Per exemple, el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - z &= -7 \\ x + 4y - 3z &= 7 \\ 7x + y - 2z &= -16 \end{aligned}\right\},$$


Nicole Oresme

es pot escriure com a

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

També es pot escriure com a

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Aquest fet ens permet assegurar que el sistema $AX = B$ és compatible si, i només si, B és combinació lineal de les columnes de A. I en cas que sigui compatible, és compatible determinat si, i només si, les columnes de A són linealment independents.

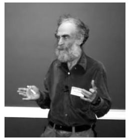
Els mètodes de Gauss i de Gauss-Jordan

Dos sistemes amb les mateixes incògnites són *equivalents* si tenen exactament les mateixes solucions.

Proposició 1.19 *Les transformacions elementals per files d'una matriu vistes anteriorment transformen el sistema d'equacions correspo-nent en un altre sistema equivalent.*

El **mètode de Gauss** de resolució de sistemes d'equacions consisteix en transformar la matriu del sistema en una altra d'equivalent i en *forma triangular per files* mitjançant transformacions elementals.

D'aquesta manera, una vegada tenim la matriu en forma triangular per files, la resolució és immediata per substitució endarrera.


Mikhail Leonidovich Gromov

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 1.20 *Rouché-Frobenius. El sistema de m equacions lineals amb n incògnites i matriu $(A|B)$ és compatible si, i només si,* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B)$. *A més, si $AX = B$ és compatible, llavors és determinat si, i només si,* $\operatorname{rang}(A) = n$.

Exemple 1.21 Resolució del sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - z &= -7 \\ x + 4y - 3z &= 7 \\ 7x + y - 2z &= -16 \end{aligned}\right\}.$$

Escrivim la matriu del sistema i triangulem-la:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & -3 & 7 \\ 7 & 1 & -2 & -16 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 2F_2-F_1 \\ F_3\sim 2F_3-7F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 21 \\ 0 & 23 & 3 & 17 \end{array}\right) \underset{F_3\sim 11F_3-23F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 21 \\ 0 & 0 & 148 & -296 \end{array}\right).$$

Tant el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites com de la matriu ampliada és 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

El sistema triangular i la seva solució és

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - z &= -7 \\ 11y - 5z &= 21 \\ 148z &= -296 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 3y + 2 &= -7 \\ 11y - 5(-2) &= 21 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 3 + 2 &= -7 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

La solució del sistema és

$$x = -3\,, \qquad y = 1\,, \qquad z = -2\,.$$

John Napier

Mètode de Gauss-Jordan. Tot sistema d'equacions lineals es pot transformar, mitjançant transformacions elementals per files, en un sistema equivalent en *forma triangular reduïda per files*, és a dir, que compleixi

- El sistema està en forma triangular per files.
- Els coeficients situats per sobre de cada pivot també són nuls.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.22 Resolució del sistema d'equacions pel mètode de Gauss-Jordan

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-z&=2\\ x+4y+2z&=-2\\ 3x+y+z&=0 \end{aligned}\right\} .$$

Escrivim la matriu del sistema i triangulem-la fent zeros els coeficients que hi ha per sobre i per sota dels pivots:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 2F_2-F1\\ F_3\sim 2F_3-3F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & 5 & -6\\ 0 & 11 & 5 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\sim 11F_1+3F_2\\ F_3\sim F_3-F_2}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 11 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és 2 i el de l'ampliada també és 2, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
La seva *solució general* és

$$\left.\begin{aligned} 22x+4z&=4\\ 11y+5z&=-6 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x&=\frac{2-2z}{11}\\ y&=\frac{-6-5z}{11} \end{aligned}\right\} .$$

Definició 1.23 Un sistema d'equacions és **homogeni** si tots els termes independents són nuls, és a dir, $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$.

És evident que tot sistema homogeni és compatible, com a mínim té la *solució trivial*

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0\,,$$

i que tot sistema homogeni amb menys equacions que incògnites és compatible indeterminat.

Resolució simultània de sistemes

Si tenim dos o més sistemes d'equacions amb els mateixos coeficients de les incògnites, els podem resoldre simultàniament triangulant la matriu formada pels coeficients de les incògnites de tots els sistemes i tantes columnes de termes independents com sistemes d'equacions.

Alexis Claude Clairaut

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Ara bé, una vegada acabada la triangulació d'aquesta matriu, haurem d'acabar de resoldre els sistemes d'equacions un a un.

Exemple 1.24 Resolució dels sistemes d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=-2\\ 3x+z&=0\\ 2x-y+2z&=3 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} x+2y-3z&=-5\\ 3x+z&=9\\ 2x-y+2z&=9 \end{aligned}\right\}\qquad \text{i}\qquad \left.\begin{aligned} x+2y-3z&=6\\ 3x+z&=0\\ 2x-y+2z&=-2 \end{aligned}\right\}.$$

Triangulem la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -2 & -5 & 6\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3 & 9 & -2 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-3F_1\\ F_3\sim F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -2 & -5 & 6\\ 0 & -6 & 10 & 6 & 24 & -18\\ 0 & -5 & 8 & 7 & 19 & -14 \end{array}\right)_{F_3\sim 6F_3-5F_2} \simeq$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & -2 & -5 & 6\\ 0 & -6 & 10 & 6 & 24 & -18\\ 0 & 0 & -2 & 12 & -6 & 6 \end{array}\right).$$

Aleshores, la solució del primer sistema és

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=-2\\ -6y+10z&=6\\ -2z&=12 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2y-3(-6)&=-2\\ -6y+10(-6)&=6\\ z&=-6 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2(-11)&=-20\\ y&=-11\\ z&=-6 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=-11\\ z&=-6 \end{aligned}\right\}.$$

La solució del segon sistema és

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=-5\\ -6y+10z&=24\\ -2z&=-6 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2y-3\cdot 3&=-5\\ -6y+10\cdot 3&=24\\ z&=3 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2\cdot 1&=4\\ y&=1\\ z&=3 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=1\\ z&=3 \end{aligned}\right\}.$$

La solució del tercer sistema és

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=6\\ -6y+10z&=-18\\ -2z&=6 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2y-3(-3)&=6\\ -6y+10(-3)&=-18\\ z&=-3 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+2(-2)&=-3\\ y&=-2\\ z&=3 \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x&=1\\ y&=-2\\ z&=-3 \end{aligned}\right\}.$$


Erwin Schrödinger

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Henri Poincaré

Inversa d'una matriu

Definició 1.25 Una matriu quadrada A és **regular** o **invertible** si existeix una matriu B tal que $AB = BA = I$.

Si existeix, aquesta matriu és única, es denomina *inversa de A* i la representarem A^{-1}.

A continuació veurem les principals propietats de la inversa d'una matriu i el mètode de Gauss-Jordan per al seu càlcul.

Proposició 1.26 *Si la matriu A és regular, es compleix que*

(a) A^{-1} *també és regular i* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Si A i B són regulars també ho és AB, i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teorema 1.27 *Donada una matriu quadrada d'ordre n, que representem per A, són equivalents:*

(a) A és regular.

(b) $\operatorname{rang}(A) = n$.

(c) Es pot simplificar per A, és a dir, de la igualtat $AX = AY$, podem concloure que $X = Y$.

Per calcular (si és possible) la inversa d'una matriu A, hem de trobar una matriu X tal que $AX = I$. (O bé $XA = I$, les dues opcions donen lloc al mateix resultat.)

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.28 Càlcul de la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hem de trobar una matriu X tal que $AX = I$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podem escriure aquestes igualtats en forma de tres sistemes d'equacions lineals

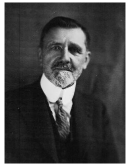
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + y_1 + z_1 &= 1 \\ 4x_1 + y_1 + 2z_1 &= 0 \\ 4x_1 + 2y_1 + z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x_2 + y_2 + z_2 &= 0 \\ 4x_2 + y_2 + 2z_2 &= 1 \\ 4x_2 + 2y_2 + z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x_3 + y_3 + z_3 &= 0 \\ 4x_3 + y_3 + 2z_3 &= 0 \\ 4x_3 + 2y_3 + z_3 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Podem resoldre aquests tres sistemes simultàniament pel mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 3F_2-4F_1 \\ F_3\sim 3F_3-4F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right)_{\substack{F_1\sim F_1+F_2 \\ F_3\sim F_3+2F_2}} \simeq$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 6 & 3 \end{array}\right)_{\substack{F_1\sim F_1-F_3 \\ F_2\sim 3F_2-2F_3}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 12 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 6 & 3 \end{array}\right) \simeq$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right).$$


Émile Borel

El procés de triangulació ens diu que la solució de l'equació

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és la mateixa que la de l'equació

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, ja tenim la inversa de la matriu A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Només ens queda un últim pas, comprovar que no ens hem equivocat en els càlculs i que, efectivament, la matriu obtinguda és la inversa de A.

Comprovació:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Carl Gustav Jacob Jacobi

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 1.29 *Si una matriu és ortogonal, es compleix que*

$$A^{-1} = A^t\,.$$

De les matrius quadrades que tenen inversa en direm *matrius regulars*, mentre que de les que no en tenen en direm *matrius singulars*

Observació 1.30 Donada l'equació matricial $AX = B$, si la matriu A és regular, la seva solució és

$$X = A^{-1}B\,.$$

Si l'equació matricial és $XA = B$ i A és regular, la solució és

$$X = BA^{-1}\,.$$

Kunihiko Kodaira

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

2 Determinants

Definició i *propietats* dels determinants de matrius quadrades d'ordres 2 i 3 i d'ordre n, en general. *Càlcul* de determinants pel *mètode de Gauss* i de *Laplace*. Aplicació dels determinants al *càlcul de la inversa* d'una matriu i a la resolució de sistemes d'equacions lineals (*mètode de Cramer*).

Determinants de matrius d'ordres 2 i 3

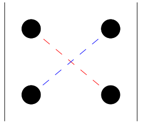
Donada una matriu quadrada d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix},$$

el seu *determinant* és

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1\,,$$

és a dir, el "producte en creu" dels coeficients de la matriu:



De manera similar, donada una matriu quadrada d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix},$$

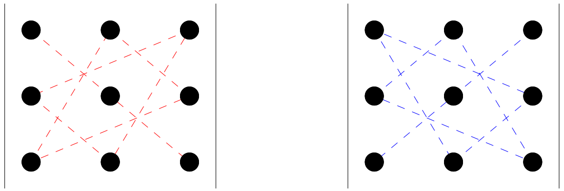
el seu *determinant* és

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2\,.$$


Solomon Lefschetz

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Una manera de recordar aquests termes és l'esquema següent, anomenat *regla de Sarrus*:



Signe + **Signe –**

Observació 2.1 Hem de calcular la suma de sis termes, cada un dels quals és el producte de tres coeficients de la matriu A. A més en cada producte hi apareix un coeficient de cada fila i un coeficient de cada columna i, si fem una llista de les columnes que apareixen a cada terme tindrem les permutacions

$$(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\,.$$

Finalment, a les tres primeres permutacions els correspon el signe $+$ i a les tres últimes el signe $-$. Per passar de la permutació trivial $(1,2,3)$ a una de les tres primeres necessitem 0 o 2 transposicions

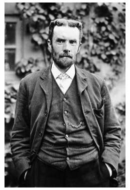
$$\begin{array}{lllll} (1,2,3) & & & & \\ (1,2,3) & \rightarrow & (2,1,3) & \rightarrow & (2,3,1) \\ (1,2,3) & \rightarrow & (2,1,3) & \rightarrow & (3,1,2) \end{array}$$

mentre que per passar de la permutació trivial a una de les tres últimes necessitem una transposició

$$\begin{array}{lll} (1,2,3) & \rightarrow & (3,2,1) \\ (1,2,3) & \rightarrow & (2,1,3) \\ (1,2,3) & \rightarrow & (1,3,2) \end{array}$$

Felix Christian Klein

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Oliver Heaviside

Exemple 2.2 Càlcul d'un determinant d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 7 + (-3)\cdot 4\cdot 2 + (-5)\cdot(-3)\cdot(-5) - (-5)\cdot 2\cdot 2 - (-3)\cdot(-3)\cdot 7 - 3\cdot 4\cdot(-5)$$

$$= 42 - 24 - 75 + 20 - 63 + 60 = -40\,.$$

Determinants de matrius d'ordre n

Si fem servir la mateixa idea per als determinants de matrius d'ordre 4, és a dir, fer la suma de tots els possibles productes d'un coeficient de cada fila i de cada columna (cada un dels productes amb el signe + o −), haurem d'escriure les 24 permutacions dels nombres $(1,2,3,4)$, que són

$$\begin{matrix} (1,2,3,4) & (1,2,4,3) & (1,3,2,4) & (1,3,4,2) & (1,4,2,3) & (1,4,3,2) & (2,1,3,4) & (2,1,4,3) \\ (2,3,1,4) & (2,3,4,1) & (2,4,1,3) & (2,4,3,1) & (3,1,2,4) & (3,1,4,2) & (3,2,1,4) & (3,2,4,1) \\ (3,4,1,2) & (3,4,2,1) & (4,1,2,3) & (4,1,3,2) & (4,2,1,3) & (4,2,3,1) & (4,3,1,2) & (4,3,2,1) \end{matrix}$$

i calcular el nombre de transposicions necessàries per obtenir-ne cada una a partir de la permutació trivial $(1,2,3,4)$.

A la taula següent podem veure tots el productes que van amb signe positiu quan apliquem la regla de Sarrus al càlcul dels determinants de matrius quadrades d'ordre 4.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Nicolas de Condorcet

I, a continuació, veiem tots el productes que van amb signe negatiu,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

Seguin el mateix argument el **determinant** d'una matriu quadrada d'ordre n és

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n} \,,$$

on $\mathcal{P}_n$ és el conjunt de totes les permutacions dels nombres $(1,2,\dots,n)$ i $\epsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació σ, que és

- $\epsilon(\sigma) = 1$ si el nombre de transposicions necessàries per passar de la permutació trivial $(1,2,\dots,n)$ a σ és parell.
- $\epsilon(\sigma) = -1$ si el nombre de transposicions necessàries per passar de la permutació trivial $(1,2,\dots,n)$ a σ és senar.

Per exemple el signe de la permutació $(2,4,1,3)$ és -1 ja que el nombre de permutacions necessàries per obtenir-la a partir de $(1,2,3,4)$

$$(1,2,3,4) \quad\to\quad (2,1,3,4) \quad\to\quad (2,4,3,1) \quad\to\quad (2,4,1,3)$$

és senar.

Aquest mètode de càlcul dels determinants no és pràctic ja que requereix un gran nombre de multiplicacions i sumes. En la propera secció veurem els mètodes de Gauss i de Laplace, molt més útils per al seu càlcul.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Abans de veure'ls, necessitem estudiar les propietats més significatives dels determinats. Quan sigui necessari especificar les files de la matriu A, posarem

$$A = (A_1 \quad A_2 \ \cdots \ A_n)\,.$$

Proposició 2.3 *(a) Si una matriu A té una fila de zeros,* $\det(A) = 0$.
(b) Si A és una matriu triangular inferior, és a dir, si $a_i^j = 0$ quan $i < j$, o triangular superior, el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal principal

$$\det(A) = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n\,.$$

Teorema 2.4 *(a) El determinant és una funció multilineal de les files, és a dir:*

- *Si una fila es descompon en una suma, $A_i = B_i + C_i$, aleshores*
$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_n) = \det(A_1 \cdots B_i \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots C_i \cdots A_n)\,.$$
- *Si en una fila es treu un factor comú, $A_i = tB_i$, aleshores*
$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_n) = t\det(A_1 \cdots B_i \cdots A_n)\,.$$

(b) El determinant és una funció alternada de les files, és a dir, si permutem dues files, $A_i = A_j$, el determinant canvia de signe

$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n)$$

Exemple 2.5 Alguns exemples en el cas de matrius d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\,.$$


Teiji Takagi

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Les dues propietats que relacionen les operacions que fem quan triangulem una matriu i el càlcul de determinants són les que veiem a continuació i són la base del mètode de Gauss per al càlcul de determinants

Proposició 2.6 *(a) Si multipliquem una fila per un nombre λ, el determinant queda multiplicat per aquest nombre*

$$\det(A_1 \cdots \lambda A_i \cdots A_j \cdots A_n) = \lambda \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n)\,.$$

(b) Si a una fila li sumem o restem un múltiple d'una altra fila, el determinant no varia

$$\det(A_1 \cdots A_i + tA_j \cdots A_j \cdots A_n) = \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n)\,.$$

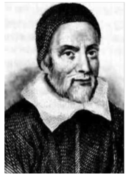
La manera més habitual en que utilitzarem les propietats de la proposició anterior en el mètode de Gauss és

$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) = \frac{1}{\lambda} \det(A_1 \cdots \lambda A_i + \mu A_j \cdots A_j \cdots A_n)\,.$$

Altres propietats dels determinants:

- $\det(A^t) = \det(A)$. En conseqüència, totes les propietats dels determinants enunciades per a files són vàlides també per a columnes.
- Si una fila de la matriu A és combinació lineal de les altres, aleshores $\det(A) = 0$.
- Si A és quadrada d'ordre n i λ un nombre real, aleshores

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\,.$$



Henry Briggs

- Fórmula del producte: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Si la matriu quadrada A té inversa, aleshores

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.7 Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{tenim que} \qquad 2A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

però entre els seus determinants, es compleix la relació

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \qquad \text{i} \qquad \det(2A) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -104 = 2^3 \cdot (-13)\,.$$

Observem que per a matrius quadrades d'ordre 3 es compleix la relació

$$\det(2A) = 2^3 \det(A)\,.$$

Càlcul de determinants

Mètode de Gauss

Operant per files es pot arribar sempre a una matriu triangular, el determinant de la qual és, segons hem vist, el producte dels coeficients de la diagonal principal. Només cal tenir en compte com aquestes transformacions modifiquen el determinant.

Exemple 2.8 Càlcul del determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}_{\substack{F_2\sim 2F_2-3F_1 \\ F_3\sim F_3-2F_1 \\ F_4\sim 2F_4+3F_1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & 2 & 15 \end{vmatrix}_{\substack{F_3\sim 7F_3-F_2 \\ F_4\sim 7F_4+11F_2}} =$$


William Paul Thurston

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$\frac{1}{4}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 36 & 116 \end{vmatrix}_{F_4 \sim F_4 + 18F_3} = \frac{1}{4}\frac{1}{49}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot (-2) \cdot (-28)}{4 \cdot 49} = 4\,.$$

Regla de Laplace

Donada una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i fixat un coeficient a_i^j, denotarem per A_{i-}^{j-} la submatriu d'ordre $n-1$ que s'obté eliminant la fila i i la columna j de la matriu A. Anomenarem *adjunt* de a_i^j al determinant d'aquesta submatriu multiplicat per $(-1)^{i+j}$:

$$A_i^j = (-1)^{i+j}\det(A_{i-}^{j-})\,.$$

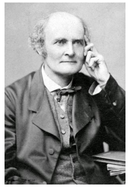
És fàcil recordar el signe corresponent a cada coeficient amb l'ajut de l'esquema següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.9 Donada la matriu d'ordre 4

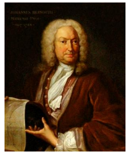
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{2-}^{3-} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \cancel{4} & 3 \\ \cancel{3} & \cancel{-4} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ 4 & -9 & \cancel{8} & 5 \\ -3 & 2 & \cancel{-5} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & -9 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



Arthur Cayley

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Johann Bernoulli

i l'adjunt del coeficient a_2^3 és

$$A_2^3 = -\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & -9 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\,.$$

Teorema 2.10 *Regla de Laplace.*
(a) Fixada una fila i qualsevol d'una matriu quadrada A, es compleix que

$$\det(A) = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \cdots + a_i^n A_i^n\,.$$

(b) Fixada una columna j qualsevol d'una matriu quadrada A, es compleix que

$$\det(A) = a_1^j A_1^j + a_2^j A_2^j + \cdots + a_n^j A_n^j\,.$$

Exemple 2.11 Càlcul del determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}\,.$$

Desenvolupant pels elements de la primera columna tenim que

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 7 & -7 & 5 \\ -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 7 & -7 & 5 \\ -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$+(-5)\begin{vmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \\ -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \\ 7 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-5) + 3\cdot 3 - 5\cdot 5 - 8\cdot(-6) = 17\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.12 Aquest dos mètodes també es poden combinar i aplicar a qualsevol matriu quadrada. A més les transformacions elementals del mètode de Gauss es poden fer tant per files com per columnes. Veiem-ho en el càlcul d'un determinant d'ordre 3.

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\-2&1&3\\-3&5&2\end{vmatrix}_{\substack{C_2\sim 2C_2+3C_1\\ C_3\sim 2C_3-C_1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&0&0\\-2&-4&8\\-3&1&7\end{vmatrix} = \frac{+2}{4}\begin{vmatrix}-4&8\\1&7\end{vmatrix} = -18\,.$$

Inversa d'una matriu

En primer lloc, anem a veure un mètode per al càlcul de la inversa d'una matriu regular basat en els determinants.

Definició 2.13 Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu quadrada, A^{ad} representarà la **matriu adjunta** de A, que resulta de substituir cada coeficient a_i^j de A pel seu adjunt A_i^j.

Teorema 2.14 *Una matriu A és regular si, i només si,* $\det(A) \neq 0$. *En aquest cas*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A^{ad}\right)^t\,.$$

Exemple 2.15 Càlcul de la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix}2&-3&1\\3&2&-1\\-5&3&1\end{pmatrix}.$$

Com que

$$\det(A) = \begin{vmatrix}2&-3&1\\3&2&-1\\-5&3&1\end{vmatrix} = 4-15+9+10+6+9 = 23\,,$$

Irving Kaplansky

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

la matriu A és regular i podem calcular la seva inversa amb la fórmula del teorema anterior. Calculem en primer lloc els coeficients de A^{ad}:

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_1^2 = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_1^3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad A_2^3 = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_3^2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

Per tant,

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 19 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

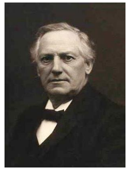
Comprovació:

$$\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 19 & 9 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La regla de Cramer

Definició 2.16 Un sistema d'equacions lineals és un *sistema de Cramer* si té tantes equacions com incògnites i la matriu dels coeficients de les incògnites és regular, és a dir, té determinant no nul.

En els sistemes de Cramer (que són sempre compatibles determinats) la solució per a cada incògnita es pot obtenir com a quocient de dos determinants.


Jorgen Pedersen Gram

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 2.17 *Regla de Cramer. Si $AX = B$ és un sistema de Cramer i $A^1, A^2, \ldots, A^n$ són les columnes de la matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, la solució del sistema ve donada per les fórmules*

$$x_i = \frac{\det(A^1 \quad A^2 \ \cdots \ B \ \cdots \ A^n)}{\det(A^1 \quad A^2 \ \cdots \ A^i \ \cdots \ A^n)} \qquad \text{per a} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemple 2.18 Resolució del sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -14 \\ 4x + y - 3z &= 1 \\ -2x + 3y + 5z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

per la *regla de Cramer*.

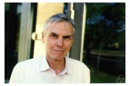
Com que

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 84\,,$$

el sistema és de Cramer, compatible determinat i la seva solució és

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{84} = \frac{-168}{84} = -2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -14 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{84} = \frac{252}{84} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -14 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{84} = \frac{-168}{84} = -2$$


John Torrence Tate

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Càlcul del rang per menors

Un *menor d'ordre r* d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ és el determinant d'una submatriu formada per la intersecció de r files i r columnes de A escollides.
Per cada possible elecció de r files i r columnes de la matriu A tindrem un menor diferent.

Exemple 2.19 Donada la matriu amb 4 files i 5 columnes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i escollint les files 2 i 4 i les columnes 1 i 5, tindrem el menor

$$M_{2,4}^{1,5} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\,.$$

Podem pensar que eliminem totes les files excepte la 2 i la 4 i totes les columnes excepte la 1 i la 5. Els coeficients que queden són els que formen aquest menor.

Direm que un menor M' *conté* a un menor M si les files i columnes que determinen M formen part, respectivament, de les files i columnes que determinen M'. Per exemple, és evident que el menor $M_{1,2,4}^{1,3,5}$ conté el menor $M_{2,4}^{1,5}$

La proposició següent ens dona un mètode alternatiu al de Gauss per al càlcul del rang d'una matriu. Està basat únicament en el càlcul de determinats i, a la pràctica, s'utilitza en matrius amb un màxim de 4 files o columnes, ja que el de Gauss requereix menys càlculs.


Enrico Bombieri

Proposició 2.20 *El rang d'una matriu A és r si, i només si, existeix algun menor regular d'ordre r i tots els menors d'ordre $r+1$ que el contenen són nuls.*

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.21 Càlcul del rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

pel mètode dels menors.

És evident que les columnes de la matriu A no són totes múltiples d'una mateixa columna; per tant, el rang com a mínim és 2, i un menor d'ordre 2 no nul és el que s'obté en escollir les files 1a. i 2a. i les columnes 1a. i 2a.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{amb} \quad M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\,.$$

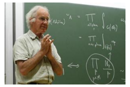
Ara hem de veure si hi ha algun menor d'ordre 3 que conté l'anterior i és no nul. Observem que a l'hora d'afegir una fila i una columna tenim quatre opcions, per tant, com a molt haurem de calcular quatre menors d'ordre 3.

Si afegim la tercera fila i la tercera columna, tenim que

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si afegim la tercera fila i la quarta columna, tenim que

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -6 & -20 \end{vmatrix} = 0\,.$$


Bryan John Birch

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Pel fet que aquests dos menors siguin nuls, podem assegurar que la matriu

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \end{pmatrix}$$

té rang 2, és a dir, les seves tres files són linealment dependents. Per tant, la matriu A no pot tenir rang 4 i el seu determinant és zero.

Si afegim la quarta fila i la tercera columna, tenim que

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{1,2,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si afegim la quarta fila i la quarta columna, tenim que

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{1,2,4}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0\,.$$

Per tant, el rang de la matriu A és 3.

El mètode de Cramer


Carl Louis Ferdinand von Lindemann

En primer lloc observem que distingim entre *regla de Cramer* i *mètode de Cramer*. La regla de Cramer s'aplica a sistemes d'equacions amb el mateix nombre d'incògnites i equacions i determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites no nul, mentre que el mètode de Cramer es pot aplicar a qualsevol sistema d'equacions.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Els passos a seguir en el mètode de Cramer són els següents:

- Calcular el rang de la matriu A.
- Calcular el rang de la matriu ampliada.

Si els rangs coincideixen, tenim un menor no nul d'ordre màxim, el sistema és compatible i continuem:

- Eliminem les equacions que no corresponen al menor trobat.
- Passem les incògnites que no corresponen al menor trobat a la dreta de les igualtats. Seran els paràmetres o incògnites secundàries en la resolució.
- Resolem el sistema resultant amb la *regla de Cramer*.

Exemple 2.22 Resolució del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ -2x + y - 3z &= -2 \\ 4x - 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

pel *mètode de Cramer*.

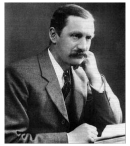
Com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

el sistema no és de Cramer i no podem aplicar directament la regla de Cramer. Aleshores, hem de seguir els passos del mètode de Cramer.

Calculem, doncs, el rang de la matriu A dels coeficients de les incògnites. No pot ser 3 ja que el seu determinant és zero i és evident que el menor d'ordre 2, $M_{1,2}^{2,3}$ és no nul

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{1,2}^{2,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\,,$$


William Burnside

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

A continuació calculem el rang de la matriu ampliada partint del menor $M_{1,2}^{2,3}$, que ja sabem que és no nul

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Els únics menors que contenen $M_{1,2}^{2,3}$ són

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} \qquad \text{i} \qquad M_{1,2,3}^{2,3,4},$$

del primer ja sabem que té determinant 0 ja que és la matriu dels coeficients de les incògnites i el segon

$$M_{1,2,3}^{2,3,4} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

per tant el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

Com que el menor d'ordre màxim no nul que hem trobat és $M_{1,2}^{2,3}$, ens quedem només amb les equacions 1a. i 2a. (files del menor)

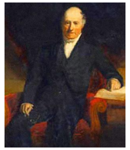
$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ -2x + y - 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

i, com que les columnes del menor són la 2a. i la 3a., deixem les incògnites y i z com a principals i passem la x a la dreta

$$\left.\begin{aligned} -y + z &= 3 - 2x \\ y - 3z &= -2 + 2x \end{aligned}\right\}.$$

Hem transformat un sistema de tres equacions amb tres incògnites a un dos per dos i de Cramer. Per tant, ja podem aplicar la regla corresponent

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3-2x & 1 \\ -2+2x & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-7+4x}{2} \qquad \text{i} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-2x \\ 1 & -2+2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2}.$$


George Green

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per tant, la solució del sistema d'equacions és

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{-7+4x}{2} \\ z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} .$$

Exemple 2.23 Estudiem el sistema d'equacions següent en funció del paràmetre a:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{aligned}\right\} .$$

En primer lloc calculem per a quins valors de a el rang de la matriu dels coeficients és màxim. En aquest cas això vol dir que el sistema és de Cramer, és a dir, el determinant de la matriu dels coeficients és no nul.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2\,.$$

Evidentment si $a^3 - 3a + 2 \neq 0$, el sistema és de Cramer i, per tant, compatible determinat. Trobem, doncs, les arrels de l'equació $a^3 - 3a + 2 = 0$ per mètode de Ruffini la primera i les altres dues amb una equació de segon grau.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Una de les arrels és $a = 1$ i les altres dues són les solucions de l'equació de segon grau $a^2 + a - 2 = 0$:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} .$$

Raphael Bombelli

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Felix Hausdorff

Per tant les arrels són $a = 1$ amb multiplicitat 2 i $a = -2$ i tenim la descomposició en factors

$$a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)\,.$$

Per tant, si $a \neq 1$ i -2, el sistema és compatible determinat, i la seva solució es pot trobar per la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^3 + a^2 + a - 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

Si $a = 1$, és clar que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 1$, llavors el sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i la seva solució general és

$$x = 1 - y - z\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Finalment, si $a = -2$, la matriu del sistema i la matriu ampliada són

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

per a les quals és evident que el menor d'ordre 2

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,.$$

L'últim menor que necessitem calcular és

$$M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9\,.$$

Per tant, en aquest cas el sistema és incompatible.

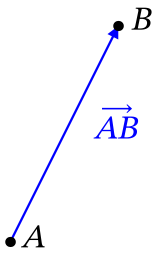

Bernard Bolzano

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

3 Vectors al pla i a l'espai

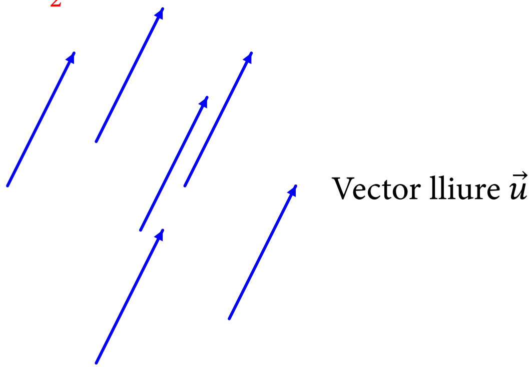
Vectors lliures al pla

Donats dos punts del pla A i B, s'anomena *vector fix* amb *origen* A i *extrem* B al segment orientat que uneix aquests dos punts. Es representa $\overrightarrow{AB}$.



Observem que cada vector fix del pla queda determinat per la seva *direcció*, el seu *sentit*, la seva *longitud* i el seu *origen* o punt d'aplicació.

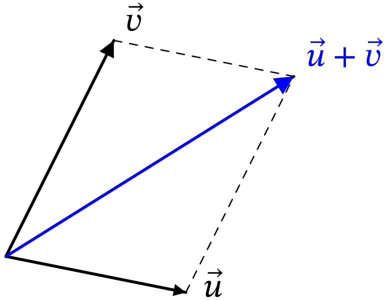
Direm que dos vectors fixos són *iguals* si coincideixen en direcció, sentit i longitud. En aquest sentit, el conjunt de tots els vectors del pla s'anomena conjunt dels *vectors lliures* del pla i es representa V_2.

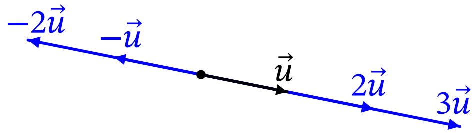


Pavel Urysohn

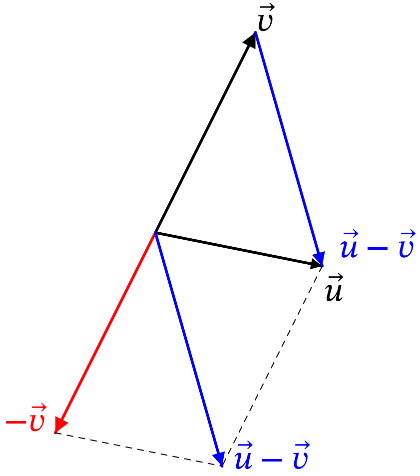
Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors de V_2, la seva *suma* $\vec{u}+\vec{v}$ s'obté mitjançant la *regla del paral·lelogram*, i el *producte* de $\vec{u}$ per un nombre $t \in \mathbb{R}$ és el vector que té $|t|$ vegades la longitud de $\vec{u}$, la mateixa direcció, el mateix sentit si $t > 0$ i sentit contrari si $t < 0$:





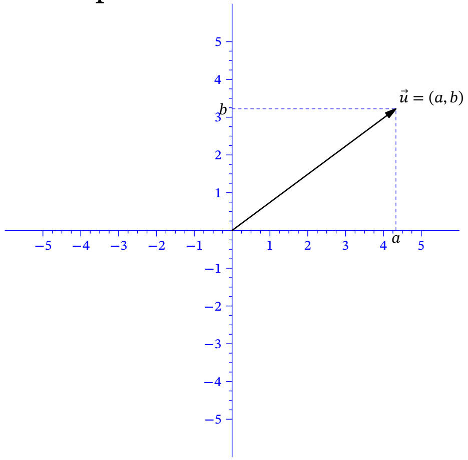
En conseqüència, la *diferència* dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, es pot representar geomètricament de dues maneres diferents, en primer lloc, representem el vector $-\vec{v}$ i a continuació sumem amb la regla del paral·lelogram els vectors $\vec{u}$ i $-\vec{v}$ o bé unim els extrems dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$. Ho veiem a la figura següent

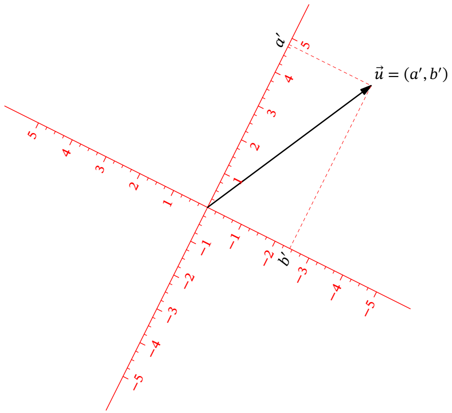


Jacques Hadamard

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

D'altra banda, fixats uns *eixos de coordenades*, a tot vector de V_2 podem assignar-li unes components (a, b). Si canviem els eixos de coordenades, també canvien les components.





En termes d'aquestes components, la suma i el producte per nombres reals s'expressa component a component:

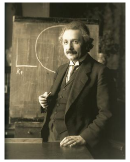
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (a_1, b_1) \\ \vec{v} = (a_2, b_2)\end{array}\right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\,.$$

$$\vec{u} = (a, b) \implies t\vec{u} = (ta, tb)\,.$$

Observació 3.1 És a dir, fixats un eixos de coordenades els vectors del pla es poden identificar amb $\mathbb{R}^2$, el conjunt dels parells ordenats de dos nombres reals.

El conjunt de *vectors lliures a l'espai*, V_3, es defineix de manera semblant i tots els conceptes són anàlegs al cas de dimensió 2, excepte que els eixos de coordenades i les components són 3.

Com abans, fixats un eixos de coordenades els vectors de l'espai es poden identificar amb $\mathbb{R}^3$, el conjunt de les ternes ordenades de tres nombres reals.



Albert Einstein

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Les operacions suma de vectors i producte per nombres reals queden

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{v} = (a_2, b_2, c_2)\end{array}\right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)\,.$$

$$\vec{u} = (a, b, c) \implies t\vec{u} = (ta, tb, tc)\,.$$

La suma de vectors i els producte per nombre reals compleixen les propietats habituals:

- *Associativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- *Commutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- *Element neutre*: existeix un vector $\vec{0}$ tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ per a tot vector $\vec{u}$.
- *Oposats*: per a cada vector $\vec{u}$ existeix un vector $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$.
- *Distributiva del producte per a la suma de vectors*: $t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v}$.
- *Distributiva del producte per a la suma d'escalars*: $(t + s)u = tu + su$.
- *Associativitat dels productes*: $t(s\vec{u}) = (ts)\vec{u}$.
- *Unitat*: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Combinacions lineals de vectors

Definició 3.2 Un vector $\vec{u}$ és **combinació lineal** dels vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ si existeixen escalars (nombres reals) $t_1, t_2, \ldots, t_m$ tals que

$$\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_m\vec{u}_m\,.$$


David Bryant Mumford

Exemple 3.3 Estudiem si el vector $\vec{u} = (2, 7, -8)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1 = (2, -1, 4)$, $\vec{u}_2 = (3, 1, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.
Per això, hem de veure si existeixen escalars $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$(2, 7, -8) = t_1(2, -1, 4) + t_2(3, 1, 1) + t_3(1, 1, 1)\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Igualant component a component obtenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} 2t_1 + 3t_2 + t_3 &= 2 \\ -t_1 + t_2 + t_3 &= 7 \\ 4t_1 + t_2 + t_3 &= -8 \end{aligned}\right\} .$$

Resolent aquest sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2+F_1 \\ F_3\sim F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & -1 & -12 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right),$$

és immediat que és compatible determinat i que la seva solució és

$$t_1 = -3, \qquad t_2 = 2, \qquad t_3 = 2.$$

Per tant, $\vec{u}$ és combinació lineal dels altres tres i, a més,

$$(2,7,-8) = -3(2,-1,4) + 2(3,1,1) + 2(1,1,1).$$

Observació 3.4 Si el sistema ens hagués sortit incompatible, hauríem dit que el vector $\vec{u}$ no és combinació lineal dels altres tres

Dependència i independència lineal de vectors

Definició 3.5 Els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ són *linealment independents* si els únics escalars o nombres reals que compleixen la igualtat

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_m\vec{u}_m = \vec{0}$$

són

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_m = 0.$$


Jacob Bernoulli

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En cas contrari, és a dir, si existeixen escalars $t_1, t_2, \dots, t_m$ no tots nuls, tals que

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_m\vec{u}_m = 0\,,$$

direm que els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ són *linealment dependents*.

D'una igualtat com aquesta en direm *relació de dependència* entre els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$. Dit d'una altra manera, aquests vectors són linealment independents si entre ells no hi ha cap relació de dependència.

Exemple 3.6 Estudiem la dependència o independència lineal dels vectors de V_3, $\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,2)$ i $\vec{u}_3 = (4,4,0)$.

Hem de veure quins coeficients t_1, t_2 i t_3 compleixen la igualtat

$$t_1(1,2,2) + t_2(-1,0,2) + t_3(4,4,0) = (0,0,0)$$

i, si igualem component a component, obtenim el sistema d'equacions

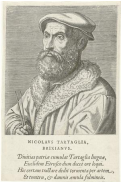
$$\left.\begin{aligned} t_1 - t_2 + 4t_3 &= 0 \\ 2t_1 + 4t_3 &= 0 \\ 2t_1 + 2t_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Per resoldre'l, triangularem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-2F_1 \\ F_3\sim F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-2F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Ja veiem que és compatible indeterminat i, per tant, els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ són linealment dependents. Per trobar una relació de dependència entre ells, hem d'acabar de resoldre el sistema

$$\left.\begin{aligned} t_1 - t_2 + 4t_3 &= 0 \\ 2t_2 - 4t_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} t_1 - 2t_3 + 4t_3 &= 0 \\ t_2 &= 2t_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} t_1 &= -2t_3 \\ t_2 &= 2t_3 \end{aligned}\right\}.$$


Niccolò Fontana Tartaglia

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Yuri Ivanovich Manin

Si prenem $t_3 = 1$, tenim una solució particular del sistema d'equacions $t_1 = -2$, $t_2 = 2$ i $t_3 = 1$, d'on resulta una relació de dependència entre els vectors

$$-2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 0\,.$$

A partir d'aquesta relació de dependència podem veure que cadascun dels tres vectors és combinació lineal dels altres dos (només cal aïllar),

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3\,, \qquad \vec{u}_2 = \vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_3 \qquad \text{i} \qquad \vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2.$$

Observació 3.7 Propietats de la la dependència o independència lineal de vectors:

- Si en una col·lecció de vectors hi ha el vector nul, seran linealment dependents.
- Tres o més vectors de V_2 són sempre linealment dependents.
- Quatre o més vectors de V_3 són sempre linealment dependents.
- Dos vectors no nuls de V_2 o V_3 són linealment independents si, i només si, tenen direccions diferents, és a dir, no són múltiples un de l'altre.
- Tres vectors de V_3 són linealment dependents si, i només si, estan continguts en el mateix pla.
- Dos vectors de V_2 són linealment independents si, i només si, el determinant de la matriu formada amb les seves components és diferent de zero.
- Tres vectors de V_3 són linealment independents si, i només si, el determinant de la matriu formada amb les seves components és diferent de zero.

En l'exemple anterior, tenim que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

per tant, són linealment dependents i estan continguts en un pla.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Bases de V_2 i V_3

Definició 3.8 Una base de V_2 és qualsevol conjunt ordenat de dos vectors de V_2 linealment independents. Ho representarem

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Una base de V_3 és qualsevol conjunt ordenat de tres vectors de V_3 linealment independents. Ho representarem

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

A V_2, sempre suposarem fixada una base

$$\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$$

formada per dos vectors unitaris i perpendiculars, a la que anomenarem base canònica de V_2. També la representarem per les seves components $\mathcal{B}_c = \{(1,0),(0,1)\}$.
De manera semblant, a V_3, sempre suposarem que hem fixat una base

$$\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$$

formada per tres vectors unitaris i perpendiculars entre ells, a la que anomenarem base canònica de V_3. També la representarem per les seves components $\mathcal{B}_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Components d'un vector en una base

Donada una base de V_2, $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, qualsevol altre vector $\vec{u} \in V_2$ es posar posar com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2\,.$$

Aleshores, direm que (x_1, y_1) són les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$ i ho representarem

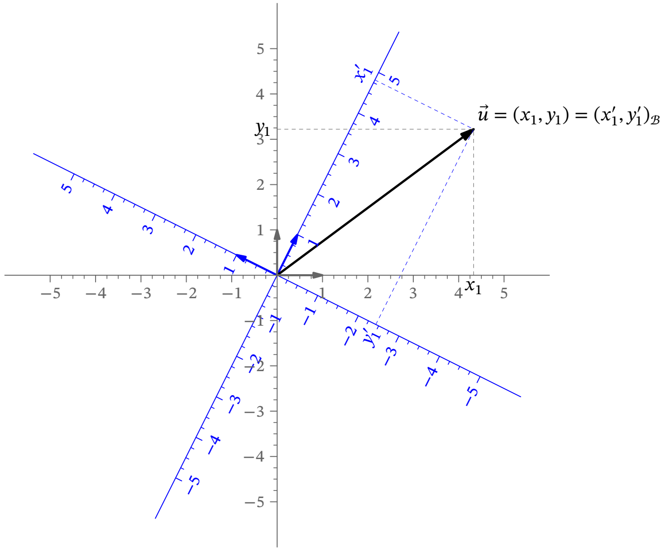
$$\vec{u} = (x_1, y_1)_{\mathcal{B}}\,.$$

Si la base és la canònica escriurem simplement $\vec{u} = (x_1, y_1)$.


Thoralf Albert Skolem

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En el gràfic següent podem veure les components d'un vector $\vec{u}$ en la base canònica i en la base $\mathcal{B}$.



Exemple 3.9 Càlcul de les components del vector $\vec{u} = (7, 2)$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$.
Hem de trobar els coeficients $x', y' \in \mathbb{R}$ tals que

$$(7, 2) = x'(1, 2) + y'(-1, 1)\,,$$

aleshores, igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x' - y' &= 7 \\ 2x' + y' &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Si el resolem amb la regla de Cramer tindrem que

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 \qquad \text{i} \qquad y' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -4\,.$$

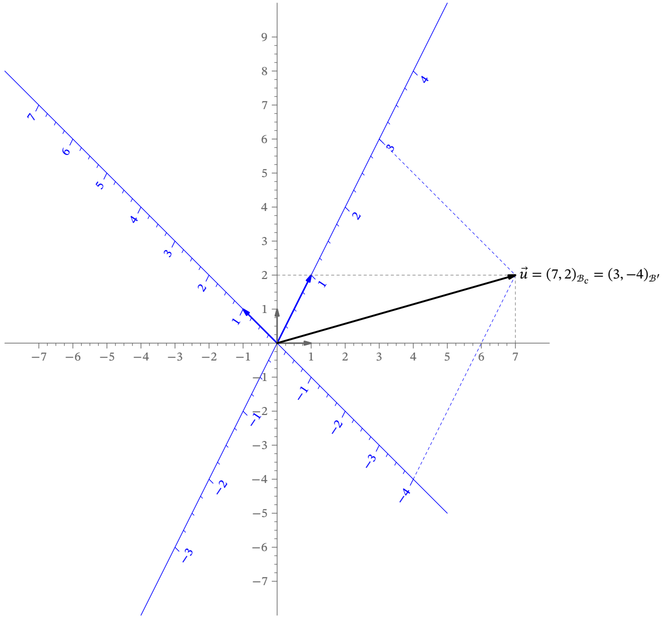

Louis Nirenberg

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per tant, les components del vector $(7, 2)$ en la base $\mathcal{B}'$ són $(3, -4)$. Ho representarem

$$\vec{u} = (7, 2) = (3, -4)_{\mathcal{B}'} .$$

En el gràfic següent podem veure representades les bases canònica i $\mathcal{B}'$ i el vector $\vec{u}$.



Observació 3.10 Cada base de V_2 determina uns eixos de coordenades a partir dels quals podem *mesurar* els vectors, és a dir, les bases fan en les magnituds vectorials el mateix que les unitats en les magnituds escalars.
Anàlogament, donada una base de V_3, $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, qualsevol altre vector $\vec{u} \in V_3$ es posar posar com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3 .$$

Aleshores, direm que (x_1, y_1, z_1) són les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$ i ho representarem

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}} .$$

Si la base és la canònica escriurem simplement $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$.

Charles Émile Picard

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.11 Calculem les components del vector $\vec{u} = (-1, 5, 4)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 1, 2), (-2, 1, 1)\}.$$

Com en el cas de dimensió 2, hem de trobar tres coeficients tals que

$$(-1, 5, 4) = x'(1, 1, 0) + y'(1, 1, 2) + z'(-2, 1, 1),$$

aleshores, igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x' + y' - 2z' &= -1 \\ x' + y' + z' &= 5 \\ 2y' + z' &= 4 \end{aligned}\right\}.$$

Triangulem la matriu d'aquest sistema per resoldre'l pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)_{F_3 \leftrightarrow F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right),$$

i tindrem que

$$\left.\begin{aligned} x' + y' - 2z' &= -1 \\ 2y' + z' &= 4 \\ 3z' &= 6 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x' + y' - 4 &= -1 \\ 2y' + 2 &= 4 \\ z' &= 2 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x' + 1 - 4 &= -1 \\ y' &= 1 \\ z' &= 2 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x' &= 2 \\ y' &= 1 \\ z' &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant les components de $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}'$ són $(2, 1, 2)$, és a dir,

$$\vec{u} = (-1, 5, 4) = (2, 1, 2)_{\mathcal{B}'}.$$


Carl Louis Ferdinand von Lindemann

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Equacions i matriu del canvi de base

Si repetim el que hem fet a l'exemple 3.9 per a un vector genèric que tindrà components (x, y) en la base canònica i components (x', y') en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2), (-1,1)\}$, tindrem que

$$(x, y) = x'(1,2) + y'(-1,1)\,.$$

Igualant terme a terme, tindrem que

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= 2x' + y' \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

i, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Tant l'expressió 3.1 com la 3.2 s'anomenen equacions del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica. Mentre que la matriu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

s'anomena matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica.

Si calculem la inversa de la matriu C, tindrem que

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir, C^{-1} és la matriu del canvi de base de la base canònica a la base $\mathcal{B}'$

Si ara volem calcular les components del vector $\vec{u} = (7, 2)$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2), (-1,1)\}$ només cal que fem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Repetim ara el mateix amb una nova base $\mathcal{B}'$ de V_3. Si un vector genèric té components (x, y, z) en la base canònica i components (x', y', z') en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,-2), (-1,3,-1), (-2,1,-3)\}$, tindrem que

$$(x, y, z) = x'(1,1,-2) + y'(-1,3,-1) + z'(-2,1,-3)\,,$$

Sofya Vasilyevna Kovalevskaya

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Igualant terme a terme, tenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - y' - 2z' \\ y &= x' + 3y' + z' \\ z &= -2x' - y' - 3z' \end{aligned}\right\} . \tag{3.3}$$

i, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

Tant l'expressió 3.3 com la 3.4 s'anomenen equacions del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica. Mentre que la matriu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

s'anomena matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica.

Si calculem la inversa de la matriu C, tindrem que

$$C^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 \\ -1 & 7 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 \\ -1 & 7 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

és a dir, C^{-1} és la matriu del canvi de base de la base canònica a la base $\mathcal{B}'$

Si ara volem calcular les components del vector $\vec{u} = (11, -11, 4)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, -2), (-1, 3, -1), (-2, 1, -3)\}$$

només cal que fem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 \\ -1 & 7 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$


John Horton Conway

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 3.12 Si $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}' = \{(a_1^1, a_2^1)_{\mathcal{B}}, (a_1^2, a_2^2)_{\mathcal{B}}\}$ són dues bases de V_2, anomenarem matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ a la matriu

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}} = (x', y')_{\mathcal{B}'} = x'(a_1^1, a_2^1)_{\mathcal{B}} + y'(a_1^2, a_2^2)_{\mathcal{B}}$, es compleix que

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1^1 x' + a_1^2 y' \\ y &= a_2^1 x' + a_2^2 y' \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definició 3.13 Si $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}' = \{(a_1^1, a_2^1, a_3^1)_{\mathcal{B}}, (a_1^2, a_2^2, a_3^2)_{\mathcal{B}}, (a_1^3, a_2^3, a_3^3)_{\mathcal{B}}\}$ són dues bases de V_3, anomenarem matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ a la matriu

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

Ara, si $\vec{u} = (x, y, z)_{\mathcal{B}} = (x', y', z')_{\mathcal{B}'} = x'(a_1^1, a_2^1, a_3^1)_{\mathcal{B}} + y'(a_1^2, a_2^2, a_3^2)_{\mathcal{B}} + z'(a_1^3, a_2^3, a_3^3)_{\mathcal{B}}$, tindrem que

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1^1 x' + a_1^2 y' + a_1^3 z' \\ y &= a_2^1 x' + a_2^2 y' + a_2^3 z' \\ z &= a_3^1 x' + a_3^2 y' + a_3^3 z' \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exemple 3.14 Donades les bases $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-1, 2)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(1, -1), (2, 1)\}$, calculem les matrius del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$ i de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$.


John Napier

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Recordem que sempre suposem que d'entrada tenim fixada la base canònica $\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ i, per tant, tenim que

$$\mathcal{B}' = \left\{(1,1)_{\mathcal{B}_c}, (-1,2)_{\mathcal{B}_c}\right\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}'' = \left\{(1,-1)_{\mathcal{B}_c}, (2,1)_{\mathcal{B}_c}\right\}.$$

Així, per a cada vector $\vec{u} \in V_2$, tindrem les seves components en la base canònica, les seves components en la base $\mathcal{B}'$ i les seves components en la base $\mathcal{B}''$,

$$\vec{u} = (x, y) = (x', y')_{\mathcal{B}'} = (x'', y'')_{\mathcal{B}''}$$

$$(x, y) = x'(1,1) + y'(-1,2) = x''(1,-1) + y''(2,1)$$

Tal com hem vist en els exemples anteriors, en aquest cas tindrem que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

i, en conseqüència,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Per obtenir la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$, hem d'expressar (x'', y'') en funció de (x', y'). Això ho fem a partir de la igualtat 3.5:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

Per tant, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$ és

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$


Augustus de Morgan

De manera semblant obtenim la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$. Novament a partir de la igualtat 3.5, tenim que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Endre Szemerédi

Per tant, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$ és

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

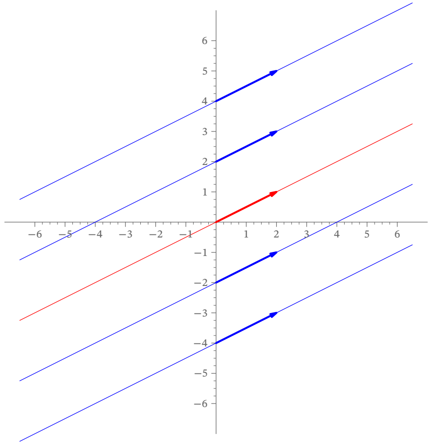
Rectes i plans vectorials

A diferència del capítol següent, quan en aquest parlem de rectes i plans ens referirem a rectes i plans vectorials, és a dir, que només tindrem en compte els vectors que hi estan continguts.

Definició 3.15 Donat un vector no nul $\vec{u} \in V_2$ o $\vec{u} \in V_3$, anomenarem **recta vectorial generada per $\vec{u}$** al conjunt de tots els múltiples de $\vec{u}$. La representarem per

$$R = \langle \vec{u} \rangle .$$

Intuïtivament, donem per conegut el concepte de *línia recta* i com a observadors només ens fixem en els vectors que hi estan continguts. Aleshores, totes les línies paral·leles a una de fixada, contenen exactament els mateixos vectors i defineixen, per tant, la mateixa recta vectorial.



Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

De la mateixa manera que tots els vectors fixos que tenen una determinada longitud, direcció i sentit defineixen el mateix vector lliure, totes les línies rectes que tenen la mateixa direcció, donen lloc a *la mateixa recta vectorial*.

Si $R = \langle \vec{u} \rangle$, direm que R és la recta generada pel vector $\vec{u}$ i que $\vec{u}$ és una base de la recta vectorial.

Observacions 3.16 En dimensió 2 es compleix que

(a) Si $\vec{u} = (a, b)$ és una base de la recta R, tots els vectors de R compleixen l'equació

$$bx - ay = 0\,.$$

D'aquesta equació en direm equació implícita de la recta.

(b) Recíprocament, totes les solucions de l'equació $Ax + By = 0$, formen la recta vectorial generada pel vector $\vec{v} = (B, -A)$.

Observacions 3.17 En dimensió 3 es compleix que

(a) Si $\vec{u} = (a, b, c)$ és una base de la recta R, tots els vectors de R compleixen l'*equació contínua de la recta*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

De fet, aquesta equació és equivalent a un sistema de dues equacions homogènies amb tres incògnites

$$\left.\begin{aligned} bx - ay &= 0 \\ cx - az &= 0 \end{aligned}\right\}\,.$$

(b) Recíprocament, les solucions d'un sistema homogeni de dues equacions amb tres incògnites i rang 2

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x + a_1^2 y + a_1^2 z &= 0 \\ a_2^1 x + a_2^2 y + a_2^2 z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

formen una recta vectorial generada per qualsevol solució no nul·la d'aquest sistema. Aquest sistema són les *equacions implícites de la recta*.


Gottfried Wilhelm Leibniz

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.18 Trobem una base de la recta d'equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x - 3y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Resolem aquest sistema pel mètode de Gauss per trobar la solució general

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim 2F_2 - F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right),$$

aleshores,

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ -7y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x + \frac{5z}{7} + 3z &= 0 \\ y &= \frac{5z}{7} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\frac{13z}{7} \\ y &= \frac{5z}{7} \end{aligned}\right\}$$

Com que només necessitem una solució particular del sistema, prenem $z = 7$ i tindrem que el vector $\vec{u} = (-13, 5, 7)$ és una base (o un generador) d'aquesta recta.

Definició 3.19 Donat dos vectors linealment independents $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V_3$, anomenarem **pla vectorial generat per aquests dos vectors** al conjunt de totes les combinacions lineals. El representarem per

$$P = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle .$$

Si $P = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, direm que P és el pla generat pels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ i que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és una base del pla vectorial.

Observació 3.20 Els plans vectorials compleixen que si $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ formen una base del pla P, tots els vectors de P compleixen l'*equació implícita del pla*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x \\ b_1 & b_2 & y \\ c_1 & c_2 & z \end{vmatrix} = 0 .$$


Erwin Schrödinger

BarcelonaTECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Recíprocament, les solucions de qualsevol equació de la forma

$$Ax + By + Cz = 0$$

formen un pla vectorial i dues de les seves solucions que siguin linealment independents en seran una base.

Exemple 3.21 (a) Calculem l'equació implícita del pla de V_3 generat pels vectors $(2,-3,1)$ i $(1,-2,1)$.
Només cal calcular un determinat i ho farem desenvolupant pels coeficients de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -3 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -x - y - z = 0\,,$$

és a dir, l'equació és $x + y + z = 0$.
(b) Trobem ara una base del pla d'equació implícita $2x + 3y - 2z = 0$.
És immediat que els vectors $(1,0,1)$ i $(3,-2,0)$ són solució d'aquesta equació, per tant $\{(1,0,1),(3,-2,0)\}$ és una base del pla.

És important que observem que, de la mateixa manera que les components dels vectors canvien si canviem de base, les equacions dels plans i les rectes també. Així parlarem de les equacions d'un pla o una recta en la base canònica i de les seves equacions en una base $\mathcal{B}'$.

Exemple 3.22 Calculem les equacions de la recta $x - 3y = 0$ en la base $\mathcal{B}' = \{(-1,1),(1,2)\}$.
Les equacions del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \left.\begin{aligned} x &= -x' + y' \\ y &= x' + 2y' \end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, per a obtenir l'equació de la recta en la base $\mathcal{B}'$ només cal substituir

$$\begin{gathered} x - 3y = 0 \\ -x' + y' - 3(x' + 2y') = 0 \\ -4x' - 5y' = 0 \\ 4x' + 5y' = 0\,. \end{gathered}$$


Charles Hermite

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Productes escalar i vectorial

Definició 3.23 El **producte escalar** de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de V_2 o V_3 és el producte de les seves longituds pel cosinus de l'angle que formen

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\, ||\vec{v}|| \cos \alpha(\vec{u}, \vec{v})$$

Les propietats bàsiques del producte escalar són:

- definida positiva: $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ per a tot $\vec{u} \neq 0$;
- simètrica (commutativa): $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- compatible amb el producte per escalars: $(t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (t\vec{v})$;
- distributiva respecte de la suma: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

També és immediat que dos vectors són *perpendiculars* si, i només si, el producte escalar és zero.

Com que les bases canòniques de V_2 i V_3, $\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ i $\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ estan formades per vectors unitaris i perpendiculars entre ells, l'expressió del producte escalar en aquesta base és

$$\begin{aligned} \vec{u} = (x_1, y_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2) \qquad &\text{aleshores} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \qquad &\text{aleshores} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

De manera semblant, la longitud de vectors expressats en la base canònica és

$$\begin{aligned} \vec{u} = (x_1, y_1) \qquad &\text{aleshores} \qquad ||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \qquad &\text{aleshores} \qquad ||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

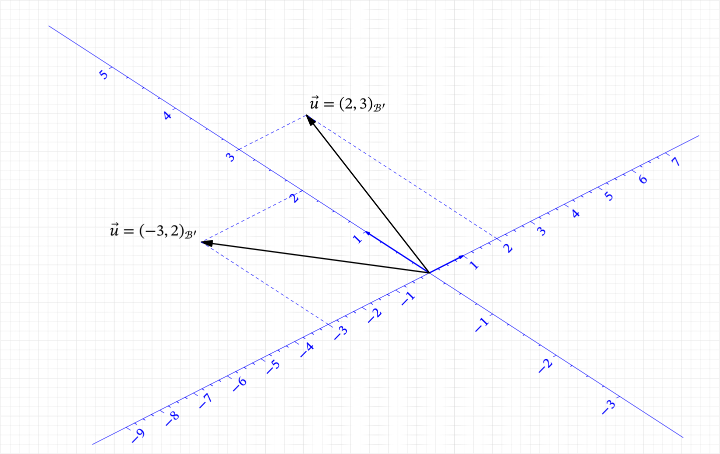
Definició 3.24 Direm que una base és **ortogonal** si està formada per vectors perpendiculars entre ells i que és **ortonormal** si els seus vectors són perpendiculars entre ells i unitaris.


Jean-Victor Poncelet

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 3.25 Les igualtats 3.6 i 3.7 són vàlides no només en la base canònica sinó en *qualsevol base ortonormal*
El càlcul de productes escalars, longituds i angles és immediat tant en la base canònica com en les bases ortonormals.

Exemple 3.26 Sigui $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de V_2 tal que $||\vec{e}_1|| = 1$, $||\vec{e}_2|| = 2$ i $\alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 120°$. Calculem el producte escalar, les longituds i l'angle format pels vectors vectors $\vec{u} = (2,3)_{\mathcal{B}'}$ i $\vec{v} = (-3,2)_{\mathcal{B}'}$.



En primer lloc tenim que

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1\,, \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos(120°) = -1 \qquad \text{i} \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 4\,,$$

aleshores,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -6\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - 9\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= -6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 9 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 23\,. \end{aligned}$$

De manera semblant,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 6\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 6\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) + 9 \cdot 4 = 28\,, \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= (-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot (-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = 9\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 - 6\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - 6\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= 9 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) - 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = 37\,. \end{aligned}$$


Kurt Friedrich Gödel

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per tant,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 23\,,\quad ||\vec{u}|| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,,\quad ||\vec{v}|| = \sqrt{37}\,,\quad \cos\alpha(\vec{u},\vec{v}) = \frac{23}{2\sqrt{7}\sqrt{37}} \simeq 0.714575$$

i $\alpha(\vec{u},\vec{v}) \simeq 44.3916°$.

Matriu de Gram d'una base

Definició 3.27 Donada una base de V_2, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, o de V_3, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, anomenarem **matriu de Gram** d'aquesta base a la matriu formada pels productes escalars dels seus vectors:

$$G = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad G = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

En el cas de l'exaemple anterior en el que $||\vec{e}_1|| = 1$, $||\vec{e}_2|| = 2$ i $\alpha(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 120°$, tindrem que la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'$ és

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposició 3.28 *Si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de V_3 expressats en la base $\mathcal{B}'$ tenen components $\vec{u} = (x_1', y_1', z_1')_{\mathcal{B}'}$ i $\vec{v} = (x_2', y_2', z_2')_{\mathcal{B}'}$, aleshores*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix}.$$

Observació 3.29 La situació en dimensió 2 és completament anàloga.

Atle Selberg

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.30 Donada la base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, sabem que la seva matriu de Gram és

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les equacions implícites de la recta vectorial R en aquesta base són

$$\left.\begin{aligned} x' + 2y' + z' &= 0 \\ 2x' + 3y' + 3z' &= 0 \end{aligned}\right\},$$

trobem l'equació implícita del pla vectorial P perpendicular a R.

Per trobar el vector director de la recta, hem de resoldre el sistema format per les seves equacions implícites:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

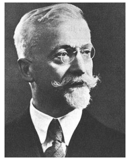
d'on

$$\left.\begin{aligned} x' + 2y' + z' &= 0 \\ -y' + z' &= 0 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x' &= -3z' \\ y' &= z' \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, el vector $\vec{u} = (-3, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$ és un vector director de la recta R. Com que els vectors $(x', y', z')_{\mathcal{B}'}$ del pla P han de ser perpendiculars al vector $\vec{u} = (-3, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$, han de complir que

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{o bé} \qquad -x' + y' + 2z' = 0\,.$$

Observem que el producte escalar entre els vectors $(-3, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$ i $(x', y', z')_{\mathcal{B}'}$ no es pot calcular multiplicant component a component i sumant, ja que no estan expressats en la base canònica, sinó que s'ha de calcular fent servir l'anterior proposició.


Élie Cartan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Així doncs, l'equació implícita en la base $\mathcal{B}'$, del pla vectorial P perpensdicular a la recta R és

$$-x' + y' + 2z' = 0 \qquad \text{o bé} \qquad x' - y' - 2z' = 0\,.$$

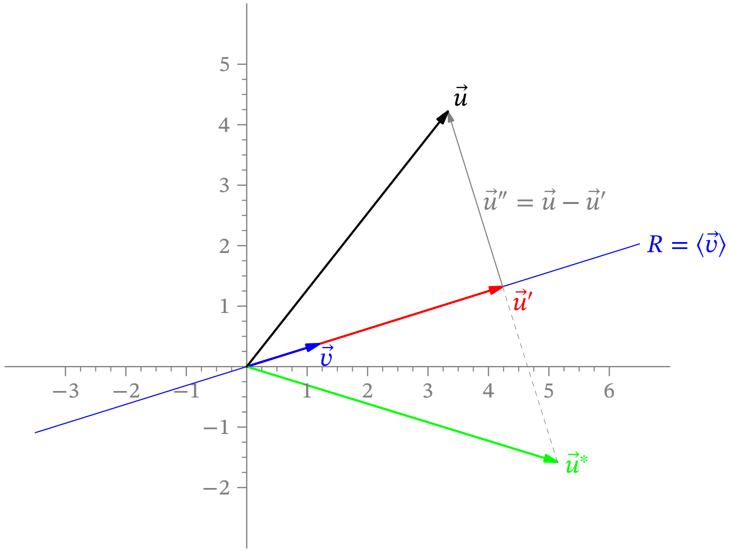
Projeccions ortogonals i mètode de Gram-Schmidt

Definició 3.31 La **projecció ortogonal** del vector $\vec{u}$ sobre la recta vectorial $R = \langle \vec{v} \rangle$ és l'únic vector $\vec{u}' \in R$ que compleix que $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$ és perpendicular a R.

Com que el vector $\vec{u}'$ ha de pertànyer a R, haurà de ser de la forma $\vec{u}' = t\vec{v}$ i s'ha de complir que

$$(\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v} = 0\,, \qquad (\vec{u} - t\,\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0\,, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} - t\,\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

$$t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$




Sofya Vasilyevna Kovalevskaya

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

És a dir, la projecció ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre la recta vectorial $R = \langle \vec{v} \rangle$ és el vector

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}\,.$$

Definició 3.32 La **projecció ortogonal** del vector $\vec{u}$ sobre el pla vectorial $P = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ és l'únic vector $\vec{u}' \in P$ que compleix que $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$ és perpendicular a P.

El *simètric* del vector $\vec{u}$ respecte a la recta vectorial R o al pla vectorial P és el vector

$$\vec{u}^* = \vec{u}' - \vec{u}'' = 2\vec{u}' - \vec{u}\,,$$

on $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$.

Com que el vector $\vec{u}'$ ha de pertànyer al pla P, haurà de ser de la forma

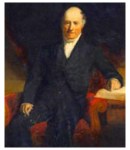
$$\vec{u}' = t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$$

i s'ha de complir que

$$\left.\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v}_1 = 0\\ (\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v}_2 = 0\end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned}(\vec{u} - (t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2)) \cdot \vec{v}_1 = 0\\ (\vec{u} - (t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2)) \cdot \vec{v}_2 = 0\end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned}t_1\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}_1\\ t_1\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + t_2\,\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2\end{aligned}\right\} \quad \text{o bé} \quad \left.\begin{aligned}\vec{v}_1 \cdot (t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}\\ \vec{v}_2 \cdot (t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}\end{aligned}\right\}$$

és a dir, $\vec{u}' = t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$ on t_1 i t_2 són solució del sistema d'equacions que té forma matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \end{pmatrix}.$$


George Green

Exemple 3.33 Calculem la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (3, -2, 4)$ sobre el pla vectorial $P = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.
La projecció ortogonal és el vector $\vec{u}' = t_1(1, 1, 0) + t_2(1, 0, 1)$ on t_1 i t_2 són solució del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} (1,1,0) \cdot (1,1,0) & (1,1,0) \cdot (1,0,1) \\ (1,1,0) \cdot (1,0,1) & (1,0,1) \cdot (1,0,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3,-2,4) \cdot (1,1,0) \\ (3,-2,4) \cdot (1,0,1) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Si resolem aquest sistema mitjançant la regla de Cramer, tenim que

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{3} \qquad \text{i} \qquad t_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{13}{3},$$

per tant, la projecció ortogonal és

$$\vec{u}' = -\frac{5}{3}(1,1,0) + \frac{13}{3}(1,0,1) = \frac{1}{3}(8,-5,13).$$

Observació 3.34 Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ és una base ortogonal de P, la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre el pla P és

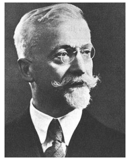
$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\,\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\,\vec{v}_2.$$

Definició 3.35 El mètode d'**ortogonalització de Gram–Schmidt** és un algoritme que, a partir d'una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ d'un pla vectorial o $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V_3, permet obtenir-ne una d'ortogonal.

Es basa en les propietats de la projecció ortogonal i consisteix simplement en prendre els vectors

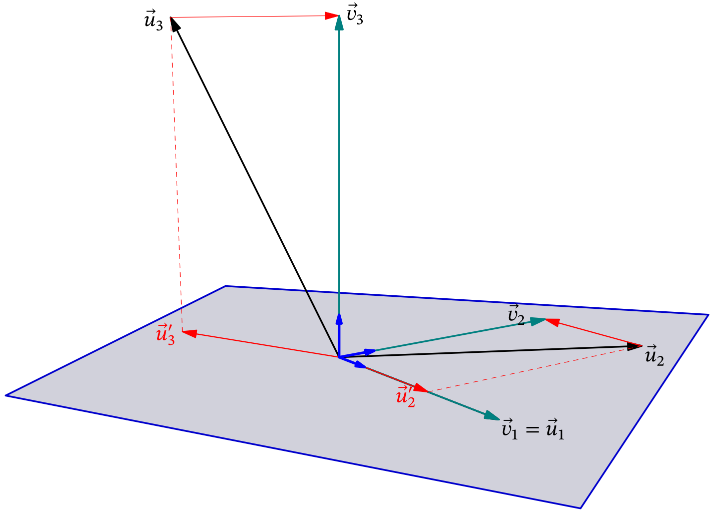
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \vec{u}_2' \\ \vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \vec{u}_3' \end{aligned}$$

on $\vec{u}_2'$ és la projecció ortogonal del vector $\vec{u}_2$ sobre la recta $\langle \vec{v}_1 \rangle$ i $\vec{u}_3'$ és la projecció ortogonal del vector $\vec{u}_3$ sobre el pla $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Així, pel que hem vist abans, tindrem que


Élie Cartan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\, \vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\, \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\, \vec{v}_2 \,.
\end{aligned}
$$



Exemple 3.36 Càlcul d'una base ortonormal del pla vectorial P generat pels vectors $(1,1,0)$ i $(1,0,1)$.
Per trobar-ne una d'ortogonal, només cal que apliquem el mètode de Gram-Schmidt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1,1,0) \\
\vec{v}_2 &= (1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}\,(1,1,0) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\
&= \frac{1}{2}(1,-1,2) \simeq (1,-1,2)\,.
\end{aligned}
$$


Paul Albert Gordan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Aleshores, $\{(1,1,0),(1,-1,2)\}$ és una base ortogonal de P i, si dividim cada vector per la seva longitud, en tindrem una d'ortonormal

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right\}.$$

Observem que ara podem calcular la projecció ortogonal de l'exemple 3.33 ben fàcilment,

$$\begin{aligned}\vec{u}' &= \frac{(3,-2,4)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(3,-2,4)\cdot(1,-1,2)}{(1,-1,2)\cdot(1,-1,2)}(1,-1,2) \\ &= \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{13}{6}(1,-1,2) = \frac{1}{6}(16,-10,26) = \frac{1}{3}(8,-5,13).\end{aligned}$$

Producte vectorial

Observem en primer lloc que, si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors linealment independents de V_3 amb components $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, el pla generat per aquests vectors té equació implícita

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = 0,$$

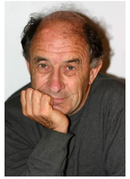
és a dir, $Ax + By + Cz = 0$, on

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Aleshores, tots el múltiples del vector (A, B, C) són perpendiculars a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$. En particular, el vector (A, B, C) s'anomena **producte vectorial** de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i es representa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Si dos vectors són linealment dependents, el seu producte vectorial és el vector nul.



Vladimir Igorevich Arnold

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 3.37 *El producte vectorial de dos vectors compleix les propietats següents:*

- $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \sin \alpha(\vec{u}, \vec{v})$.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ *és perpendicular a* $\vec{u}$ *i a* $\vec{v}$.
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) > 0$ *(regla del tornavís o de la ma dreta).*

La manera habitual de calcular el producte vectorial de dos vectors $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ de V_3 és mitjançant el determinant

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

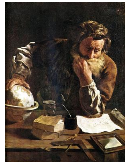
Altres propietats del producte vectorial:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
- $t(\vec{u} \times \vec{v}) = (t\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t\vec{v})$.
- $\vec{u} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \times \vec{v}_1 + \vec{u} \times \vec{v}_2$.
- $||\vec{u} \times \vec{v}||$ és l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Exemple 3.38 Calculem l'equació implícita del pla de V_3 generat pels vectors $(2, -3, 1)$ i $(1, -2, 1)$.
El vector

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

és perpendicular al pla (o a tots els vectors del pla), per tant, l'equació implícita del pla és $x + y + z = 0$.
Observem que el càlcul és totalment equivalent al de l'apartat (a) l'exemple 3.21.


Archimedes

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Dennis Parnell Sullivan

Definició 3.39 Dues bases $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ tenen **mateixa orientació** si la matriu del canvi de base d'una a l'altra té determinant positiu. Una base $\mathcal{B}'$ té **orientació positiva** si té la mateixa orientació que la base canònica.

Observació 3.40 Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors linealment independents de V_3, els vectors

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$$

formen una base amb orientació positiva.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

4 Geometria al pla i a l'espai

En aquest capítol considerarem que el pla i l'espai estan formats per *punts* i *vectors* i els elements geomètrics que estudiarem són les *rectes*, els *plans*, les *còniques* i les *quàdriques*, caracteritzats per la propietat següent: fixats uns eixos de coordenades, queden definits per equacions de primer o segon grau.
Representarem per P_2 el conjunt de tots els punts del pla i per P_3 el conjunt de tots els punts de l'espai. Com en el capítol anterior V_2 i V_3 seran els conjunts de vectors del pla i de l'espai.

Observació 4.1 Les relacions bàsiques entre punts i vectors són:

- Donats dos punts $p, q \in P$ ($P = P_2$ o $P = P_3$), existeix un únic vector $\vec{u} \in V$ ($V = V_2$ o $V = V_3$) que els uneix. El representarem per $\vec{u} = \overrightarrow{pq}$ i direm que està situat amb origen en el punt p i extrem en el punt q.
- Donats tres punts $p, q, r \in P$, es compleix que
$$\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$$
- Donats un punt $p \in P$ i un vector $\vec{u} \in V$, existeix un únic punt $q \in P$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{pq}$. El representarem per $q = p + \vec{u}$ i en direm extrem del vector $\vec{u}$ quan el seu origen està en el punt p.

Sistemes de referència

En primer lloc, anem a posar nom al concepte *eixos de coordenades* del pla o de l'espai

Definició 4.2 Un **sistema de referència** o simplement **referència** del pla o de l'espai és un sistema format per un punt $o \in P$, anomenat *origen* de la referència i una *base* de V.

Així, les referències del pla i les de l'espai són de la forma
$$\mathcal{R} = \{o; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{R} = \{o; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$


August Ferdinand Möbius

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

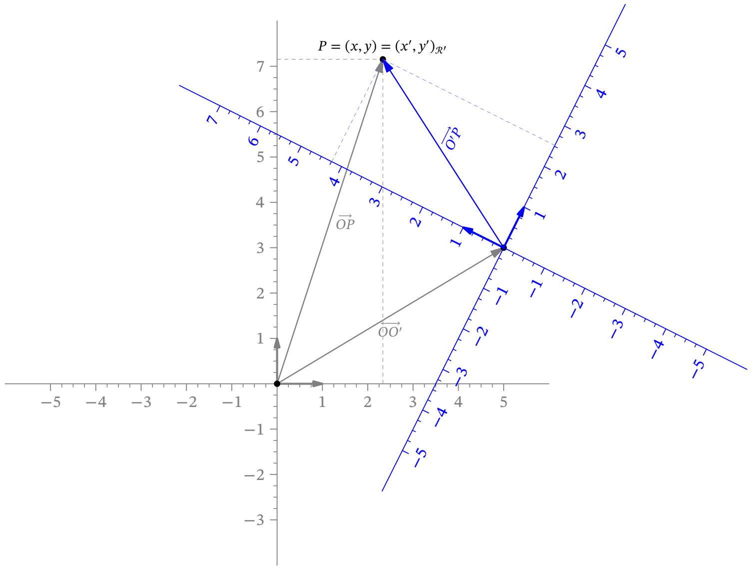
Donat qualsevol punt del pla o de l'espai $p \in P$, el vector $\overrightarrow{op}$ s'anomena *vector de posició* del punt p en la referència $\mathcal{R}$ i les components d'aquest vector en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, en el cas del pla, o $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en el cas de l'espai són les *coordenades del punt p en la referència $\mathcal{R}$*.
Així, si $\overrightarrow{op} = (x_1, y_1)_{\mathcal{B}} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$ (o $\overrightarrow{op} = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{B}} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3$), direm que p té coordenades (x_1, y_1) (o (x_1, y_1, z_1)) en la referència $\mathcal{R}$ i escriurem

$$p = (x_1, y_1)_{\mathcal{R}} \qquad \text{o bé} \qquad p = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}\,.$$

D'ara en endavant suposarem que al pla P_2 hem fixat una referència amb origen en un punt $o \in P_2$ i que té com a base la base canònica $\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. L'anomenarem *referència canònica* de P_2. De manera semblant, a l'espai P_2 també suposarem que hem fixat també la *referència canònica*. Les representarem per

$$\mathcal{R}_c = \{o; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{R}_c = \{o; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}\,.$$

En el gràfic següent veiem les coordenades d'un punt p en la referència canònica i en una referència $\mathcal{R}' = \{o'; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.




Jean Bourgain

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observem que, en el gràfic anterior, tenim les components dels vectors $\overrightarrow{oo'}$ i $\overrightarrow{op}$ en la base canònica

$$\overrightarrow{oo'} = (x_0, y_0) \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{op} = (x, y)$$

així com les components del vector $\overrightarrow{o'p}$ en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$,

$$\overrightarrow{o'p} = (x', y')_{\mathcal{B}'} .$$

Observem que, a més, es compleix que

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$$

i aquesta igualtat és la base de la fórmula o equacions dels canvi de coordenades.

Proposició 4.3 *Donada una referència $\mathcal{R} = \{o; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, es compleixen les propietats següents:*

- *Si $p, q \in P_3$ tenen coordenades $p = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}$ i $q = (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{R}}$ en la referència $\mathcal{R}$, aleshores el vector $\overrightarrow{pq}$ té components*
$$\overrightarrow{pq} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_{\mathcal{B}}$$
en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$
- *Si $p = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}$ i $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$, aleshores*
$$q = p + \vec{u} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)_{\mathcal{R}} .$$
- *El **punt mitjà** del segment pq, on $p = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}$ i $q = (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{R}}$, és el punt de coordenades*
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)_{\mathcal{R}} .$$
- *El **baricentre** del triangle pqr, on $p = (x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}$, $q = (x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{R}}$ i $r = (x_3, y_3, z_3)_{\mathcal{R}}$, és el punt de coordenades*
$$B = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)_{\mathcal{R}} .$$


Marin Mersenne

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Andrei Markov

Observem que les propietats equivalents per a dimensió 2 són completament anàlogues, només cal treure les terceres coordenades dels punts i les terceres components dels vectors.

Equacions del canvi de coordenades

Considerem la referència canònica $\mathcal{R}_c = \{o\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ o una referència inicial $\mathcal{R} = \{o\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. A partir d'aquesta definim una nova referència

$$\mathcal{R}' = \{o'; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

on

- o' té coordenades $o' = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ en la referència inicial, és a dir $\overrightarrow{oo'} = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}_c = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ o $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és la base inicial).
- El vector $\vec{u}_1$ té components $\vec{u}_1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1)_{\mathcal{B}}$ en la base inicial.
- El vector $\vec{u}_2$ té components $\vec{u}_2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2)_{\mathcal{B}}$ en la base inicial.
- El vector $\vec{u}_3$ té components $\vec{u}_3 = (a_1^3, a_2^3, a_3^3)_{\mathcal{B}}$ en la base inicial.

Aleshores, si p és un punt genèric que té coordenades $p = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$ en la referència inicial i coordenades $p = (x', y', z')_{\mathcal{R}'}$ en la referència $\mathcal{R}'$, la igualtat vectorial

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p} \tag{4.1}$$

dona lloc a les equacions del canvi de coordenades

Teorema 4.4 Equacions o fórmula del canvi de coordenades *de la referència $\mathcal{R}'$ a la referència $\mathcal{R}$.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 4.5 Partint de la referència canònica de P_2, considerem la nova referència

$$\mathcal{R}' = \{(-2,3);\ (1,2),(-1,1)\}\,.$$

Donat el punt $p=(5,8)$, és a dir, de coordenades $(5,8)$ en la referència canònica, anem a trobar les seves coordenades en la referència $\mathcal{R}'$. D'acord amb la igualtat 4.1, s'ha de complir que

$$(5,8) = (-2,3) + x'(1,2) + y'(-1,1)$$
$$(7,5) = x'(1,2) + y'(-1,1)$$

Igualant terme a terme, tenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x' - y' &= 7 \\ 2x' + y' &= 5 \end{aligned}\right\}\,,$$

que podem resoldre mitjançant la regla de Cramer

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 4 \qquad \text{i} \qquad y' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -3\,,$$

és a dir, les coordenades del punt p en la referència $\mathcal{R}'$ són $(4,-3)_{\mathcal{R}'}$ i escriurem

$$p = (5,8) = (4,-3)_{\mathcal{R}'}\,.$$

D'altra banda, les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{R}'$ a la referència canònica són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, obtenir les equacions del canvi de coordenades de la referència canònica a la referència $\mathcal{R}'$ requereix uns quants càlculs a més de trobar una inversa. En primer lloc tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gabriel Lamé

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

i, passant la inversa de la matriu a l'altra costat de la igualtat, resulta que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Per tant, les equacions del canvi de coordenades de la referència canònica a la referència $\mathcal{R}'$ són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= \frac{-1+x+y}{3} \\ y' &= \frac{-7-2x+y}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Definició 4.6 Direm que una referència és **rectangular** o **euclidiana** si els seus vectors formen una *base ortonormal* de V_2 o V_3.

En els apartats següents farem servir sempre la referència canònica de P_2 i P_3, encara que la majoria de resultats són vàlids en qualsevol referència. Quan hàgim de distingir si la referència utilitzada és rectangular o no, ho farem explícitament.

Rectes afins

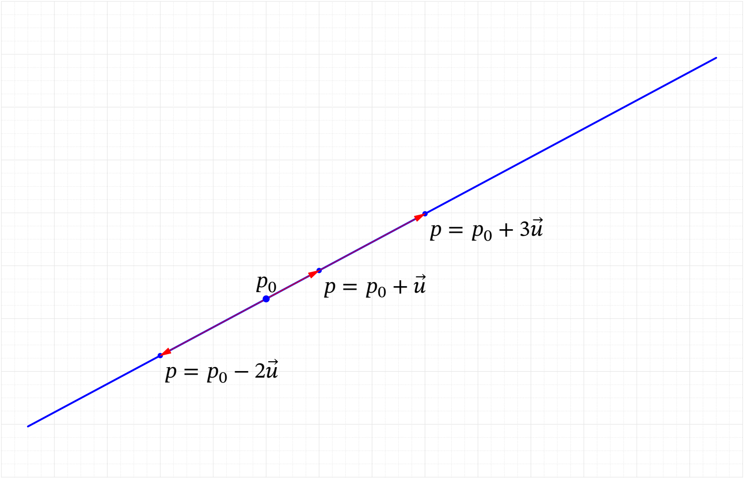
Definició 4.7 Donats un punt $p_0 \in P$ i un vector $\vec{u} \in V$ del pla o de l'espai, anomenarem **recta afí** que *passa pel punt* p_0 i té *vector director* $\vec{u}$ al conjunt de punts de la forma

$$R = \{p \in P \quad \text{tals que} \quad p = p_0 + t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}\}.$$


Colin Maclaurin

En aquest cas, podem parlar de punts de la recta i de vectors continguts a la recta (tots els múltiples de $\vec{u}$).

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Equacions de la recta en dimensió 2

Si $p_0 = (x_0, y_0)$ i $\vec{u} = (a, b)$, les possibles equacions de la recta del pla que passa per p_0 i té vector director $\vec{u}$ són

- *Equació vectorial*: $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$.
- *Equacions paramètriques*:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}\right\} .$$

- *Equació contínua*:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} .$$

- *Equació implícita*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{que es transforma en} \qquad Ax + By = C .$$


André-Marie Ampère

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En general, les solucions de qualsevol equació de primer grau $Ax + By = C$ formen una recta amb vector director $\vec{u} = (-B, A)$. Només si la referència utilitzada és rectangular podem assegurar que el vector $\vec{v} = (A, B)$ és perpendicular a la recta.

Si la referència és rectangular i $a \neq 0$ i $B \neq 0$, el *pendent* de la recta R és

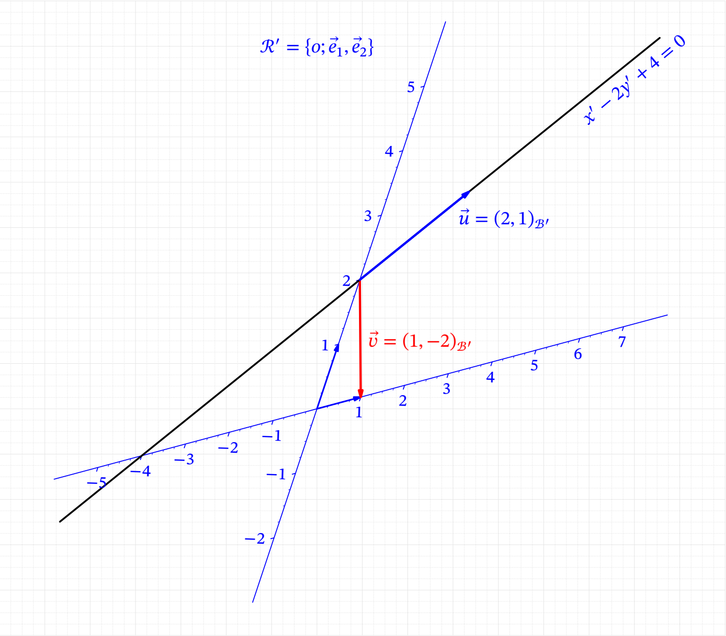
$$m = \frac{b}{a} = -\frac{A}{B}$$

i la seva equació també es pot escriure $y - y_0 = m(x - x_0)$. Si $a = 0$ o $B = 0$, tindrem una recta vertical o paral·lela a l'eix de les y.

Al gràfic següent hi podem veure una referència $\mathcal{R}' = \{o; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ no rectangular, la recta d'equació $x' - 2y' + 4 = 0$ en aquesta referència i els vectors $\vec{u} = (2, 1)_{\mathcal{B}'}$ i $\vec{v} = (1, -2)_{\mathcal{B}'}$, on $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Observem que el vector $\vec{u} = (2, 1)_{\mathcal{B}'}$ *és un vector director* de la recta, mentre que el vector $\vec{v} = (1, -2)_{\mathcal{B}'}$ ***no és** perpendicular* a la recta.

D'altra banda, és immediat que si tenim la recta d'equació $x - 2y + 4 = 0$ en la referència canònica, el vector $\vec{u} = (2, 1)$ és un vector director de la recta i el vector $\vec{v} = (1, -2)$ és perpendicular a la recta.



Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Equacions de la recta en dimensió 3

Si $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{u} = (a, b, c)$, les possibles equacions de la recta R de l'espai que passa per p_0 i té vector director $\vec{u}$ són

- *Equació vectorial*: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$.
- *Equacions paramètriques*:
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\} .$$
- *Equació contínua*:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} .$$
- *Equacions implícites*: si imposem que el rang de la matriu
$$\begin{pmatrix} a & x - x_0 \\ b & y - y_0 \\ c & z - z_0 \end{pmatrix}$$

sigui 1, obtindrem un sistema d'equacions de la forma
$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \end{aligned}\right\} . \tag{4.2}$$
on (x, y, z) representa un punt qualsevol de la recta.

De fet, qualsevol sistema d'equacions lineal amb rang 2, representa una recta, que es pot interpretar com a intersecció de dos plans. Les solucions del sistema 4.2 són els punts de la recta R, mentre que les solucions no nul·les del sistema
$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$
són *els vectors directors de la recta*.

Només si la referència és rectangular, els vectors $\vec{w}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{w}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ són perpendiculars a la recta, és a dir, als seus vectors directors.


Aristarchus of Samos

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Johannes Kepler

Exemple 4.8 Donada la recta R definida per les equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 6 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\},$$

calculem la seva equació contínua.
El que farem serà resoldre aquest sistema d'equacions per trobar les equacions paramètriques de la recta i, a partir d'aquestes, podrem escriure la contínua,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)_{F_2 \sim 3F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

De la matriu triangulada tenim que

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 6 \\ 2y + z &= 6 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} 3x + y + 2(6 - 2y) &= 6 \\ z &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x &= -2 + y \\ z &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x &= -2 + t \\ y &= t \\ z &= 6 - 2t \end{aligned}\right\};$$

per tant, la recta passa pel punt $p_0 = (-2, 0, 6)$ i té vector director $\vec{u} = (1, 1, -2)$. La seva equació contínua és

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{-2} \qquad \text{o bé} \qquad x + 2 = y = \frac{6-z}{2}.$$

Plans afins

Definició 4.9 Donats un punt $p_0 \in P_3$ i dos vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V_3$ linealment independents, anomenarem **pla afí** que *passa pel punt p_0* i té *vectors directors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$* al conjunt de punts de la forma

$$P = \{p \in P_3 \quad \text{tals que} \quad p = p_0 + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Com en cas de les rectes, podem parlar de punts del pla i de vectors continguts al pla (totes les combinacions lineals de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$).

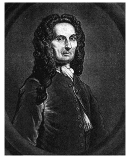
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Equacions del pla

Si $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, les possibles equacions del pla R de l'espai que passa per p_0 i té vectors directors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són

- *Equació vectorial*: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2)$.
- *Equacions paramètriques*:
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ y &= y_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 \\ z &= z_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2 \end{aligned}\right\}.$$
- *Equació implícita*:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_0 \\ b_1 & b_2 & y - y_0 \\ c_1 & c_2 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{que es transforma en} \qquad Ax + By + Cz = D$$
on
$$A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$
i (x, y, z) representa un punt qualsevol del pla.

En general, tota equació de primer grau de la forma $Ax + By + Cz = D$ defineix un pla afí a l'espai i dues solucions linealment independents de l'equació $Ax + By + Cz = 0$ seran sempre vectors directors del pla. Ara bé, només si la referència utilitzada és rectangular podem assegurar que el vector $\vec{w} = (A, B, C)$ és perpendicular al pla.


Abraham De Moivre

Anomenarem **vector associat** al pla P a qualsevol *vector no nul de V_3* que sigui perpendicular a tots els vectors continguts al pla. En particular, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són vectors directors del pla P, el vector
$$\vec{w} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$$
és un *vector associat* a P.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Si la referència utilitzada és rectangular i el vector $\vec{w} = (A, B, C)$ és un vector associat (perpendicular) al pla P, la seva equació serà de la forma

$$Ax + By + Cz = D\,,$$

on D queda determinat si coneixem un punt de pas del pla.

Exemple 4.10 Calculem l'equació del pla P que passa pels punts

$$p = (1, 2, 1)\,, \qquad q = (2, 1, 5) \qquad \text{i} \qquad r = (-1, 0, 3)\,.$$

És evident que aquest pla passa pel punt $p = (1, 2, 1)$ i té vectors directors $\vec{u}_1 = \overrightarrow{pq} = (1, -1, 4)$ i $\vec{u}_2 = \overrightarrow{pr} = (-2, -2, 2) \simeq (1, 1, -1)$. Per tant, la seva equació implícita és

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 4 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

i, si desenvolupem aquest determinant per la tercera columna, tindrem que

$$-3(x-1) + 5(y-2) + 2(z-1) = 0$$
$$-3x + 5y + 2z = 9$$

és a dir, l'equació implícita del pla és (hem canviat els signes),

$$3x - 5y - 2z = -9\,.$$

Com que la referència utilitzada és la canònica, el vector $\vec{w} = (3, -5, -2)$ és un vector associat al pla.

Posició relativa de dues rectes en dimensió 2


William Paul Thurston

Respecte a la posició relativa de les rectes R_1 que passa pel punt $p_0 \in P_2$ i té vector director $\vec{u}_1 \in V_2$ i R_2 que passa pel punt $q_0 \in P_2$ i té vector director $\vec{u}_2 \in V_2$, podem afirmar el següent:

- Les *rectes són coincidents* si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\overrightarrow{p_0q_0}$ són proporcionals.
- Les *rectes són paral·leles estrictes* (no coincidents) si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són proporcionals, però $\overrightarrow{p_0q_0}$ no és proporcional als anteriors.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

- Les *rectes són secants* si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ no són proporcionals.
- Si tenim el sistema de dues equacions amb dues incògnites format per les equacions de les dues rectes, tindrem que les rectes són coincidents, paral·leles estrictes o secants si el sistema és compatible indeterminat, incompatible o compatible determinat.

L'*angle format per les dues rectes* és l'angle format pels seus vectors directors. En particular, les rectes són *perpendiculars* si ho són els vectors directors.

Posició relativa de dues rectes en dimensió 3

Com abans, considerem les rectes R_1 que passa pel punt $p_0 \in P_3$ i té vector director $\vec{u}_1 \in V_3$ i R_2 que passa pel punt $q_0 \in P_3$ i té vector director $\vec{u}_2 \in V_3$. Aleshores,

- Les *rectes són coincidents* si $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\overrightarrow{p_0q_0}$ són proporcionals.
- Les *rectes són paral·leles estrictes* (no coincidents) si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són proporcionals, però $\overrightarrow{p_0q_0}$ no és proporcional als anteriors.
- Les *rectes són secants* si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ no són proporcionals i $\overrightarrow{p_0q_0}$ és combinació lineal dels anteriors, és a dir,
$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{p_0q_0}) = 0\,.$$
- Les *rectes s'encreuen* si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ no són proporcionals i $\overrightarrow{p_0q_0}$ no és combinació lineal dels anteriors, és a dir,
$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{p_0q_0}) \neq 0\,.$$

L'*angle format per les dues rectes* és l'angle format pels seus vectors directors. En particular, les rectes són *perpendiculars* si ho són els vectors directors.

Si tenim el sistema de quatre equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites de les dues rectes i r i r' són els rangs de les matrius dels coeficients de les incògnites i de la matriu ampliada d'aquest sistema, tindrem que:

- Si $r = r' = 3$, les rectes són *secants*.
- Si $r = r' = 2$, les rectes són *coincidents*.
- Si $r = 2$ i $r' = 3$, les rectes són *paral·les estrictes*.
- Si $r = 3$ i $r' = 4$, les rectes *s'encreuen*.

Ernst Eduard Kummer

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Posició relativa d'una recta i un pla en dimensió 3

Considerem ara la recta R que passa pel punt $p_0 \in P_3$ i té vector director $\vec{u} \in V_3$ i el pla P que passa pel punt $q_0 \in P_3$ i té vectors directors $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_3$. Aleshores,

- Si els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{u}$ són linealment independents, és a dir, $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}) \neq 0$, la recta i el pla són *secants*.
- Si els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{u}$ són linealment dependents, és a dir, $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}) = 0$ i el punt p_0 no pertany al pla ($\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{q_0 p_0}) \neq 0$) la recta i el pla són *paral·lels estrictes*.
- Si els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{u}$ són linealment dependents, és a dir, $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}) = 0$ i el punt p_0 pertany al pla ($\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{q_0 p_0}) = 0$) la recta *està continguda* en el pla.

L'*angle format per la recta i el pla* és l'*angle complementari* al format pel vector director de la recta i el vector associat al pla. En particular, la recta és *perpendicular* al pla si aquests dos vectors són proporcionals.

Si tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites de la recta i l'equació implícita de pla i r i r' són els rangs de les matrius dels coeficients de les incògnites i de la matriu ampliada d'aquest sistema, tindrem que:

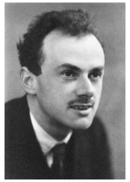
- Si $r = r' = 3$, la recta i el pla són *secants*.
- Si $r = r' = 2$, la recta està *continguda* en el pla.
- Si $r = 2$ i $r' = 3$, la recta i el pla són *paral·lels estrictes*.

Posició relativa de dos plans en dimensió 3

Donat el sistema de dues equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites dels dos plans, siguin r i r' els rangs de les matrius dels coeficients de les incògnites i de la matriu ampliada d'aquest sistema, aleshores,

- Si $r = r' = 2$, els dos plans són *secants* i la seva intersecció és una recta.
- Si $r = 1$ i $r' = 2$, els dos plans són *paral·lels estrictes*
- Si $r = 1$ i $r' = 1$, els dos plans són *coincidents*.

L'*angle format pels dos plans* és l'angle format pels seus vectors associats. En particular, els dos plans són *perpendiculars* si ho són els vectors associats.


Paul Adrien Maurice Dirac

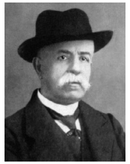
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Posició relativa de tres plans en dimensió 3

Finalment, considerem el sistema de tres equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites dels tres plans i siguin r i r' els rangs de les matrius dels coeficients de les incògnites i de la matriu ampliada d'aquest sistema, aleshores,

- Si $r = r' = 3$, els tres plans són *secants en un punt*.
- Si $r = r' = 2$, tenim dues opcions:
  - Els tres possibles sistemes de dues equacions amb tres incògnites que podem formar tenen rang 2, aleshores, els tres plans són *secants en una recta*. En aquest cas, direm que formen part d'un *feix de plans*.
  - Hi ha exactament un parell de plans de manera que el sistema de dues equacions amb tres incògnites format per les seves equacions té rang 1, aleshores, hi ha *dos plans coincidents* i l'altre és *secant* a aquests.
- Si $r = r' = 1$, els tres plans són *coincidents*.
- Si $r = 1$ i $r' = 2$, també tenim dues opcions:
  - *Tres plans paral·lels estrictes* si els tres possibles sistemes de dues equacions amb tres incògnites que podem formar són incompatibles.
  - *Dos plan coincidents* i el tercer *paral·lel estricte* als primers si exactament un dels possibles sistemes de dues equacions amb tres incògnites que podem formar és compatible indeterminat.
- Si $r = 2$ i $r' = 3$, tornem a tenir dues opcions:
  - Els plans *es tallen dos a dos en rectes paral·leles i diferents* si els tres possibles sistemes de dues equacions amb tres incògnites que podem formar són compatibles. En aquest cas, direm que els tres plans formen un *prisma*.
  - *Dos plans paral·lels estrictes* i l'altre pla *secant amb els dos primers*, si exactament un dels tres possibles sistemes de dues equacions amb tres incògnites que podem formar és incompatible.

Observació 4.11 Per estudiar la posició relativa de tres plans es imprescindible saber distingir a simple vista si un sistema de dues equacions amb tres incògnites és *incompatible*, *compatible indeterminat amb un grau de llibertat* o *compatible indeterminat amb dos graus de llibertat*.


Gregorio Ricci-Curbastro

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 4.12 Estudiem la posició relativa de la recta

$$\left.\begin{aligned} x+3y-2z&=11\\ -2x+y+3z&=-6 \end{aligned}\right\}$$

i el pla d'equació $5x+y-z=9$.
Es pot fer de diferents maneres, per exemple, estudiant el sistema de tres equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites de la recta i el pla,

$$\left.\begin{aligned} x+3y-2z&=11\\ -2x+y+3z&=-6\\ 5x+y-z&=9 \end{aligned}\right\}.$$

Si triangulem la matriu corresponent tindrem que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11\\ -2 & 1 & 3 & -6\\ 5 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2+2F_1\\ F_3\sim F_3-5F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11\\ 0 & 7 & -1 & 16\\ 0 & -14 & 9 & -46 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+2F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11\\ 0 & 7 & -1 & 16\\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{array}\right),$$

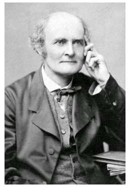
d'on resulta que

$$\left.\begin{aligned} x+3y-2z&=11\\ 7y-(-2)&=16\\ z&=-2 \end{aligned}\right\};\quad \left.\begin{aligned} x+3(2)-2(-2)&=11\\ y&=2\\ z&=-2 \end{aligned}\right\};\quad \left.\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=-2 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, la recta i el pla es tallen en el punt $(1,2,-2)$.
A més el vector associat al pla és $\vec{w}=(5,1,-1)$ i el vector director de la recta

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(11,1,7);$$


Siméon Denis Poisson


Arthur Cayley

com que els vectors $\vec{u} = (11, 1, 7)$ i $\vec{w} = (5, 1, -1)$ no són proporcionals, la recta no és perpendicular al pla. Finalment, l'angle entre aquests dos vectors és β, on

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{||\vec{u}||\,||\vec{w}||} = \frac{49}{\sqrt{171}\sqrt{27}} = \frac{49}{9\sqrt{57}} \qquad \text{i} \qquad \beta \simeq 43.8518^\circ\,.$$

Per tant, la recta i el pla formen un angle de $\alpha = 90^\circ - \beta = 46.1482^\circ$.

Exemple 4.13 Veiem ara quina és la posició relativa de les rectes

$$R_1 : \frac{x+1}{2} = y - 3 = 2 - z \qquad \text{i} \qquad R_2 : \left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

El sistema de quatre equacions amb tres incògnites format per les equacions implícites de les dues rectes és

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -7 \\ y + z &= 5 \\ 2x + y - z &= 1 \\ x - y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\},$$

i en triangular la matriu corresponent, tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)_{\substack{F_3 \sim F_3 - 2F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)_{\substack{F_3 \sim F_3 - 5F_2 \\ F_4 \sim F_4 - F_2}} \simeq$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_4 \sim 3F_4 + F_3} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right),$$

és a dir, els rangs de la matriu del coeficients de les incògnites i de la matriu ampliada són $r = 3$ i $r' = 4$ i les rectes *s'encreuen*.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

D'altra banda, l'angle format per aquestes rectes és l'angle format pels seus vectors directors. El vector director de la recta R_1 $\vec{u} = (2,1,-1)$ i el de R_2,

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2,-7,-3)\,.$$

Evidentment, el seu producte escalar és $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,1,-1)\cdot(2,-7,-3) = 0$, per tant, les dues rectes *s'encreuen i són perpendiculars*.

Exemple 4.14 Com a últim exemple de posicions relatives, estudiem la dels tres plans d'equacions

$$2x + y + 3z = 2\,, \qquad x - 3y + z = 1 \qquad \text{i} \qquad 5x - 8y + 6z = -2\,.$$

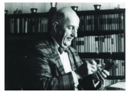
El sistema format per aquestes tres equacions és

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ x - 3y + z &= 1 \\ 5x - 8y + 6z &= -2 \end{aligned}\right\}\,,$$

triangulem, doncs, la seva matriu.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 6 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 2F_2-F_1 \\ F_3\sim 2F_3-5F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -21 & -3 & -14 \end{array}\right) \underset{F_3\sim F_3-3F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right).$$

Els rangs del sistema són $r = 2$ i $r' = 3$, és a dir, el sistema és incompatible. Com que els tres possibles sistemes de dues equacions formats per les equacions de dos dels plans (1r. i 2n., 1r. i 3r. i 2n. i 3r.), són compatibles indeterminats amb un grau de llibertat, els tres plans formen *un prisma*.
Els vectors directors de les rectes intersecció de cada parell de plans són


Carl Ludwig Siegel

$$\vec{u}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (10,1,-7)\,, \qquad \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = (30,3,-21) \qquad \text{i} \qquad \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = (-10,-1,7)\,,$$

fet que confirma que el plans es tallen en tres rectes paral·leles.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Ludwig Otto Hesse

Els vectors associats als plans són $\vec{w}_1 = (2,1,3)$, $\vec{w}_2 = (1,-3,1)$ i $\vec{w}_3 = (5,-8,6)$, i el angles que formen entre ells són,

$$\cos\alpha_1 = \frac{\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2}{||\vec{w}_1||\,||\vec{w}_2||} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{154}}{77} \simeq 0.161165\,; \qquad \alpha_1 \simeq 80.725500^\circ$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\vec{w}_1\cdot\vec{w}_3}{||\vec{w}_1||\,||\vec{w}_3||} = \frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{125}} = \frac{2\sqrt{70}}{35} \simeq 0.478091\,; \qquad \alpha_2 \simeq 61.439175^\circ$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\vec{w}_2\cdot\vec{w}_3}{||\vec{w}_2||\,||\vec{w}_3||} = \frac{35}{\sqrt{11}\sqrt{125}} = \frac{7\sqrt{55}}{55} \simeq 0.943880\,; \qquad \alpha_3 \simeq 19.286325^\circ$$

Feixos de plans

Definició 4.15 Donada una recta R, s'anomena **feix de plans** que contenen la recta R al conjunt de tots els plans que la contenen.

Si les equacions implícites de la recta R són

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \end{aligned}\right\},$$

l'equació de qualsevol pla que les conté és de la forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z - D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0 \qquad \text{amb} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Aquesta equació és l'*equació del feix de plans* que contenen la recta R.

Exemple 4.16 Busquem l'equació del pla que passa pel punt $p = (3,1,1)$ i conté la recta d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ -3x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Com que hem de trobar l'equació d'un pla que conté una recta, escrivim l'equació del feix de plans corresponent

$$\alpha(x + y + 2z) + \beta(-3x + y + z - 1) = 0\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

D'entre tots aquests plans, hem de determinar el que passa pel punt $p = (3, 1, 1)$. Substituint aquests valors de x, y i z a l'equació del feix, ens queda

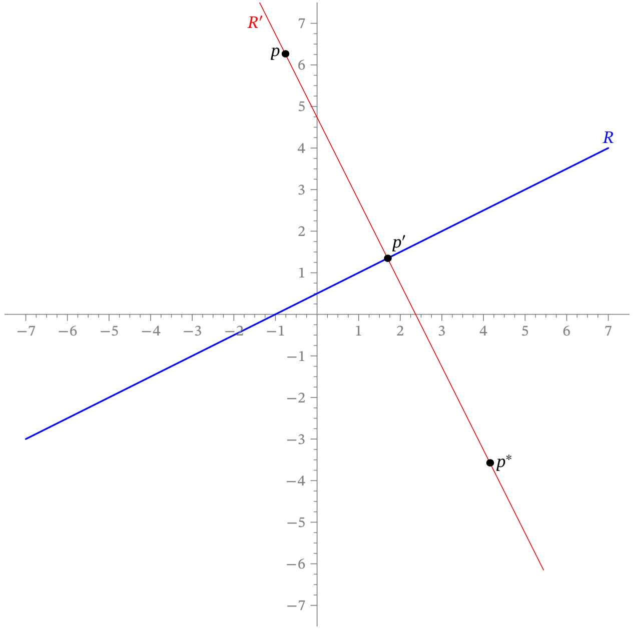
$$6\alpha - 8\beta = 0\,.$$

Una possible solució és $\alpha = 4$ i $\beta = 3$, d'on resulta que l'equació del pla serà

$$4(x + y + 2z) + 3(-3x + y + z - 1) = 0\,, \qquad \text{és a dir,} \qquad 5x - 7y - 11z = -3\,.$$

Projeccions ortogonals i simètrics

Definició 4.17 La **projecció ortogonal d'un punt** $p \in \mathbb{P}_2$ **sobre una recta** R és el *punt d'intersecció* entre la recta R i la recta perpendicular a R que passa per p.




Raoul Bott

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


André Weil

Definició 4.18 La **projecció ortogonal d'un punt** $p \in P_3$ **sobre un pla** P és el *punt d'intersecció* entre el pla P i la recta perpendicular al pla que passa per p.
La **projecció ortogonal d'un punt** $p \in P_3$ **sobre una recta** R és el *punt d'intersecció* entre la recta R i el pla perpendicular a la recta que passa per p.

Si p' és la projecció ortogonal del punt p sobre una recta o un pla, anomenarem **simètric de** p **respecte a la recta o al pla** al punt p^* que compleix que p' és el punt mitjà del segment que uneix els punts p i p^*.
És immediat comprovar que

$$p^* = p + 2\overrightarrow{pp'} = p + 2(p' - p) = 2p' - p\,.$$

Exemple 4.19 Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $p = (3, 6, 5)$ respecte al pla d'equació

$$x + 2y + 3z = 2\,.$$

El vector associat al pla és $\vec{w} = (1, 2, 3)$; per tant, l'equació vectorial i les equacions paramètriques de la recta perpendicular al pla que passa pel punt $p(3, 6, 5)$ són

$$(x, y, z) = (3, 6, 5) + t(1, 2, 3) \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x &= 3 + t \\ y &= 6 + 2t \\ z &= 5 + 3t \end{aligned}\right\}.$$

Per calcular la intersecció d'aquesta recta i el pla, només cal substituir,

$$\begin{aligned} 3 + t + 2(6 + 2t) + 3(5 + 3t) &= 2 \\ 3 + t + 12 + 4t + 15 + 9t &= 2 \\ 14t &= -28 \\ t &= -2\,. \end{aligned}$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Irving Kaplansky

Per tant, la projecció ortogonal del punt p sobre el pla és

$$p' = (3,6,5) - 2(1,2,3) = (1,2,-1)\,.$$

Finalment, el simètric del punt p respecte al pla és

$$p^* = 2p' - p = 2(1,2,-1) - (3,6,5) = (-1,-2,-7)\,.$$

Distància entre dos punts

Definició 4.20 La **distància entre dos punts** p i q del pla o de l'espai és la longitud del vector que els uneix,

$$d(p,q) = \| \overrightarrow{pq} \|\,.$$

Si $p = (x_0, y_0)$ i $q = (x_1, y_1)$ són dos punts del pla i la *referència utilitzada és rectangular*, tindrem que

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,.$$

De manera semblant, si $p = (x_0, y_0, z_0)$ i $q = (x_1, y_1, z_1)$ són dos punts del pla i la *referència utilitzada és rectangular*, tindrem que

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,.$$

Distància d'un punt a una recta en dimensió 2

La distància d'un punt p a una recta R del pla és la distància entre el punt p i la seva projecció ortogonal sobre la recta. Si la *referència utilitzada és rectangular*, $p = (x_0, y_0)$ i l'equació de la recta és $Ax + By + C = 0$, tindrem que

$$d(p,R) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Distància d'un punt a una recta en dimensió 3

La distància d'un punt p a una recta R de l'espai és la distància entre el punt p i la seva projecció ortogonal sobre la recta.

Si la recta R passa pel punt p_0 i té vector director $\vec{u}$, tindrem que

$$d(p,R) = \frac{\| \overrightarrow{p_0 p} \times \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}.$$

Distància d'un punt a un pla

La distància d'un punt p a un pla P de l'espai és la distància entre el punt p i la seva projecció ortogonal sobre el pla. Si el pla P passa pel punt p_0, té vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i vector associat $\vec{w}$, tindrem que

$$d(p,P) = \frac{|\overrightarrow{p_0 p} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\| \vec{u} \times \vec{v} \|} = \frac{|\overrightarrow{p_0 p} \cdot \vec{w}|}{\| \vec{w} \|}.$$

Si la *referència utilitzada és rectangular*, $p = (x_0, y_0, z_0)$ i l'equació del pla és $Ax + By + Cz + D = 0$, tindrem que

$$d(p,P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

A l'exemple 4.19, havíem calculat la projecció ortogonal del punt $p = (3,6,5)$ sobre el pla d'equació $x + 2y + 3z = 2$ i havíem obtingut que $p' = (1,2,-1)$. Aleshores,

$$d(p,P) = d(p,p') = \| \overrightarrow{pp'} \| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-6)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

També podem calcular la distància amb la fórmula que acabem de veure,

$$d(p,P) = \frac{|3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = \frac{28\sqrt{14}}{14} = 2\sqrt{14}.$$


Siméon Denis Poisson

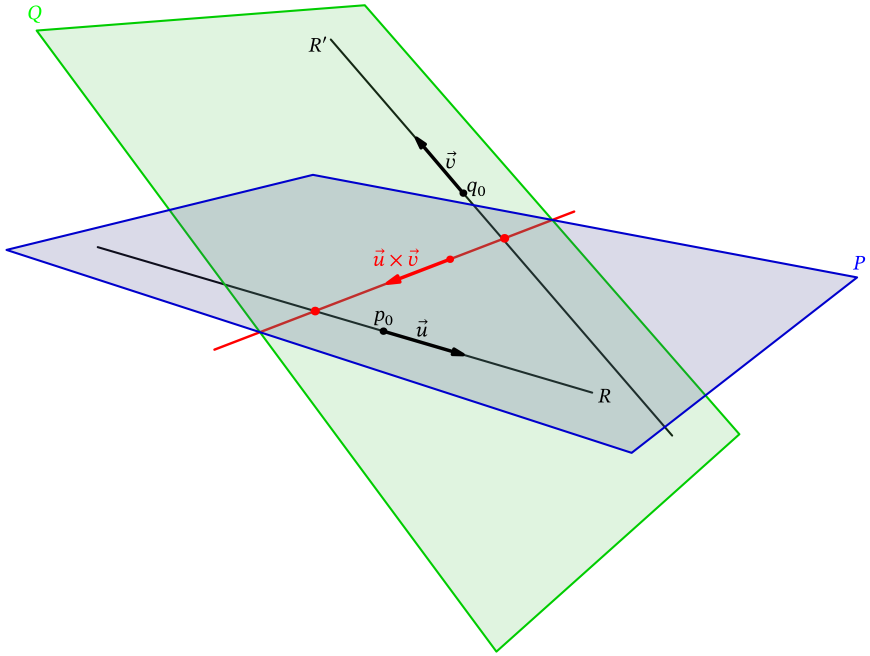
UPC
Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

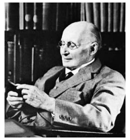
Distància entre dues rectes de l'espai que s'encreuen

La distància entre dues rectes R i R' de l'espai que s'encreuen és la *distància des d'un punt qualsevol de la primera recta al pla P que conté la recta R' i és paral·lel a R*. Si R passa pel punt p_0 i té vector director $\vec{u}$ i R' passa pel punt q_0 i té vector director $\vec{v}$, tindrem que

$$d(R,R') = \frac{|\overrightarrow{p_0q_0}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}.$$

Exemple 4.21 Siguin R la recta que passa pel punt $p_0 = (-1,0,0)$ i té vector director $\vec{u} = (0,1,-1)$ i R' la recta que passa pel punt $q_0 = (0,1,1)$ i té vector director $\vec{v} = (1,2,1)$. Calculem la distància entre elles i la recta perpendicular comuna que les talla.




Alfred North Whitehead

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En primer lloc, tenim que,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(3,-1,-1) \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{p_0q_0}=(1,1,1)\,.$$

Per tant, la distància entre les dues rectes és

$$d(R,R')=\frac{|(1,1,1)\cdot(3,-1,-1)|}{\|(3,-1,-1)\|}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}\,.$$

Tal com podem veure al gràfic anterior, la perpendicular comuna que talla aquestes dues rectes es pot obtenir com a intersecció dels plans P i Q, on P és el pla que passa pel punt p_0 i té vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{u}\times\vec{v}$ i Q és el pla que passa pel punt q_0 i té vectors directors $\vec{v}$ i $\vec{u}\times\vec{v}$.

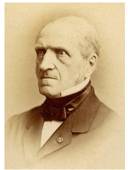
Aleshores,

$$P:\ \begin{vmatrix}0 & 3 & x+1\\ 1 & -1 & y\\ -1 & -1 & z\end{vmatrix}=-2x-3y-3z-2=0$$

$$Q:\ \begin{vmatrix}1 & 3 & x\\ 2 & -1 & y-1\\ 1 & -1 & z-1\end{vmatrix}=-x+4y-7z+3=0\,.$$

Per tant, les equacions implícites de la recta perpendicular comuna a R i R' que les talla és

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+3z&=-2\\ x-4y+7z&=3\end{aligned}\right\}\,.$$


Michel Chasles

Distància entre rectes i plans paral·lels

La distància entre dues rectes o dos plans paral·lels és la distància d'un punt qualsevol del primer al segon. La distància entre una recta i un pla paral·lels a l'espai és la distància entre un punt qualsevol de la recta al pla.

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Àrees i volums

L'*àrea d'un triangle a l'espai* amb vèrtexs p, q i r és

$$A(\mathcal{T}(p,q,r)) = \frac{1}{2}\| \overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr} \| \,.$$

Si hem de calcular l'àrea d'un triangle al pla amb vèrtexs p, q i r, podem afegir una tercera coordenada nul·la i utilitzar la fórmula anterior.

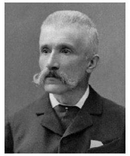
El *volum d'un paral·lelepípede a l'espai* determinat pels vèrtexs p, q, r i s és

$$V(\mathcal{P}(p,q,r,s)) = |\overrightarrow{ps} \cdot (\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr})| \,.$$

El *volum d'un tetràedre a l'espai* determinat pels vèrtexs p, q, r i s és

$$V(\mathcal{T}(p,q,r,s)) = \frac{1}{6}|\overrightarrow{ps} \cdot (\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{pr})| \,.$$

Circumferència, el·lipse, hipèrbola i paràbola


Francesco Brioschi

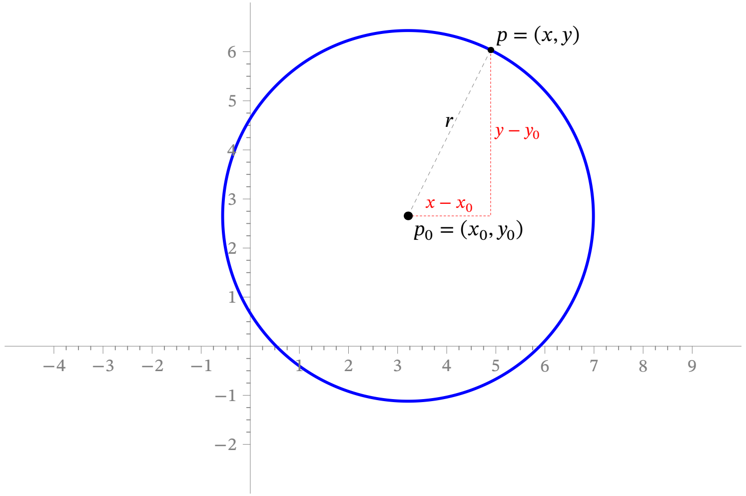
Definició 4.22 Una **circumferència** de centre en el punt $p_0 = (x_0, y_0)$ i radi r és el lloc geomètric dels punts del pla P_2 tals que

$$d(p, p_0) = r \,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Si la referència utilitzada és rectangular, la seva equació és

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

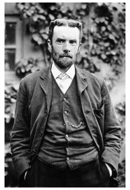


Exemple 4.23 La circumferència de centre $p_0 = (2, 3)$ i radi $r = 4$ té equació

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 ,$$

i si desenvolupem els quadrats, obtenim

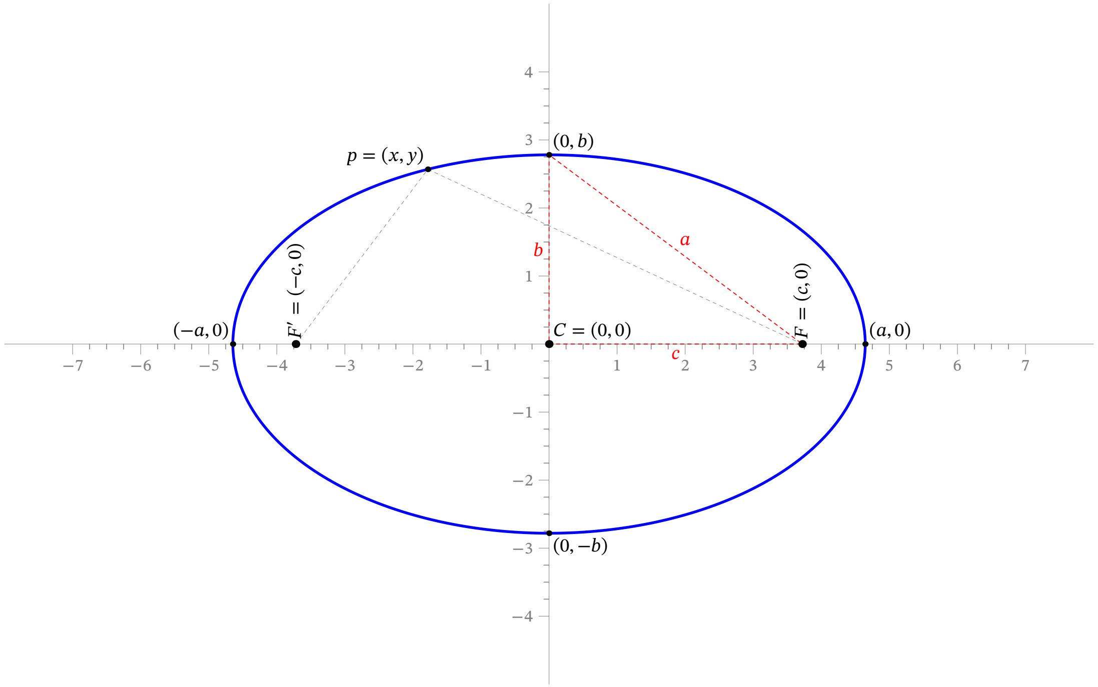
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 .$$


Oliver Heaviside

Definició 4.24 Donats dos punts F i F' del pla P_2, situats a una distància $d(F, F') = 2c > 0$ i una constant $a > c$, s'anomena **el·lipse** amb focus F i F' i *semieix major* a, al lloc geomètric dels punts del pla P_2 que compleixen

$$d(p, F) + d(p, F') = 2a$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí



El punt mitjà del segment FF' és el *centre de l'el·lipse*. Si la referència utilitzada és rectangular i els focus tenen coordenades $F = (c, 0)$ i $F' = (-c, 0)$, l'equació de l'el·lipse serà

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

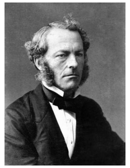
Si desenvolupem aquesta equació elevant al quadrat, tindrem que

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$


George Gabriel Stokes

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

James Clerk Maxwell

$$\begin{aligned}(cx+a^2)^2 &= a^2\big((x+c)^2+y^2\big)\\ c^2x^2+2a^2cx+a^4 &= a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)\\ (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)\,.\end{aligned}$$

Si posem $b^2 = a^2 - c^2$ i dividim l'anterior equació per a^2b^2, ens queda l'*equació reduïda de l'el·lipse*,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

La constant c s'anomena *semidistància focal* de l'el·lipse i la constant b, *semieix menor*. A més, observem que el *centre* és el punt de coordenades $C=(0,0)$ i que els eixos de coordenades són *eixos de simetria de l'el·lipse*.

La intersecció de l'el·lipse amb els eixos de coordenades són els punts $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ i $(0,-b)$, que s'anomenen *vèrtexs de l'el·lipse*.

Exemple 4.25 Determinem els vèrtexs i els focus de l'el·lipse d'equació

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\,.$$

És evident que en aquest cas, $a=4$ i $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, per tant els vèrtexs de l'el·lipse són $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,2\sqrt{3})$ i $(0,-2\sqrt{3})$. D'altra banda, sabem que $a^2=b^2+c^2$, per tant,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-12}=2\,,$$

és a dir, els focus són els punts $F=(2,0)$ i $F'=(-2,0)$.

Definició 4.26 Donats dos punts F i F' del pla P_2, situats a una distància $d(F,F')=2c>0$ i una constant positiva $a<c$, s'anomena **hipèrbola** amb focus F i F' i *semieix real* a, al lloc geomètric dels punts del pla P_2 que compleixen

$$|d(p,F)-d(p,F')|=2a$$

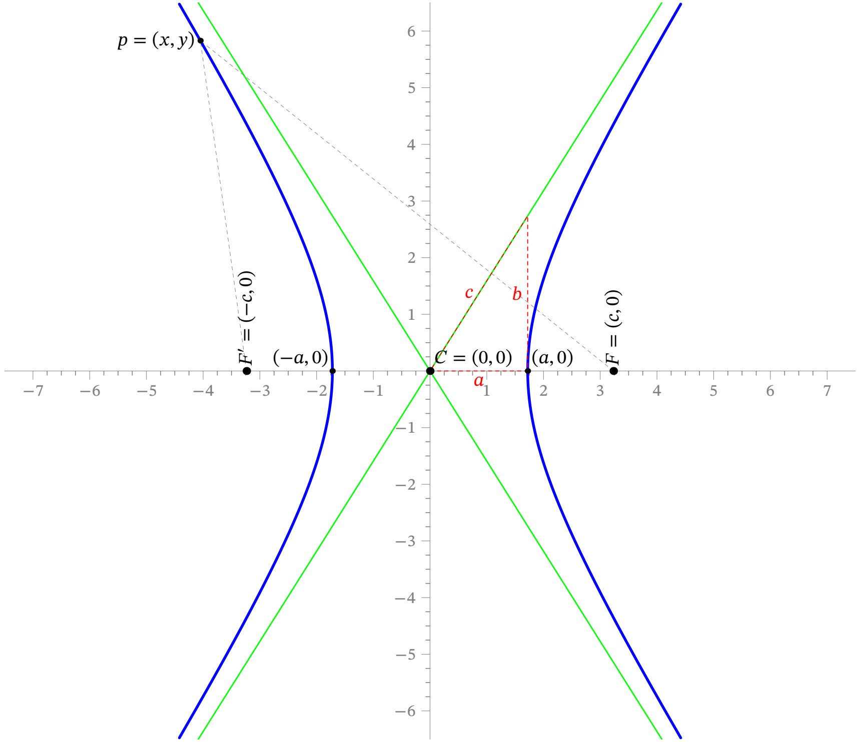
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

El punt mitjà del segment FF' és el *centre de la hipèrbola*. Si la referència utilitzada és rectangular i els focus tenen coordenades $F = (c, 0)$ i $F' = (-c, 0)$, l'equació de la hipèrbola serà

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a\,.$$

Fent un càlculs molt semblants al cas de l'el·lipse, aquesta equació es transforma l'*equació reduïda de la hipèrbola*,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$



La constant c s'anomena *semidistància focal* de la hipèrbola i la constant b, *semieix imaginari*. Com en el cas de la el·lipse, el *centre* és el punt de coordenades $C = (0, 0)$ i els eixos de coordenades són *eixos de simetria de la hipèrbola*.


Louis Nirenberg

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

La intersecció de la hipèrbola amb l'eix d'abscisses són els punts $(a, 0)$, $(-a, 0)$, que s'anomenen *vèrtexs de la hipèrbola*; en canvi, no talla l'eix d'ordenades.
Les rectes d'equacions

$$bx + ay = 0 \qquad \text{i} \qquad bx - ay = 0$$

són les *asímptotes de la hipèrbola*, és a dir, les rectes que passen pel seu centre i tenen pendent

$$m = \frac{\pm b}{a}\,.$$

Exemple 4.27 Calculem les asímptotes de la hipèrbola

$$4x^2 - y^2 = 8$$

i la intersecció d'aquesta hipèrbola amb la recta $y = \sqrt{2}\,x$.

Dividint l'equació de la hipèrbola per 8 i passant els numeradors a dividir el denominador, tenim que

$$\frac{4x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1 \qquad \text{és a dir,} \qquad \frac{x^2}{\frac{8}{4}} - \frac{y^2}{8} = 1\,.$$

Per tant, la equació de la hipèrbola és

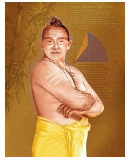
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1\,,$$

i els semieixos real i imaginari són $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Per tant les equacions de les seves asímptotes són $2\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 0$ i $2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0$, que simplificades per $\sqrt{2}$ queden

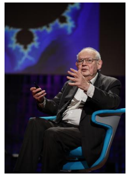
$$2x + y = 0 \qquad \text{i} \qquad 2x - y = 0\,.$$

Per calcular la intersecció de la recta $y = \sqrt{2}\,x$ amb la hipèrbola només cal substituir la y per $\sqrt{2}\,x$ a la seva equació,

$$4x^2 - y^2 = 8$$
$$4x^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 = 8$$


Madhava of Sangamagrama

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Benoit Mandelbrot

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 2x^2 &= 8\\
2x^2 &= 8\\
x^2 &= 4\\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Així doncs, els punts d'intersecció són $(2, 2\sqrt{2})$ i $(-2, -2\sqrt{2})$.

Definició 4.28 Donats un punt F i una recta R del pla que no el conté, s'anomena **paràbola** amb *focus* F i *recta directriu* R al lloc geomètric dels punts del pla P_2 que compleixen

$$d(p, F) = d(p, R)\,.$$

El punt mitjà del segment FF', on F' és la projecció ortogonal de F sobre la recta directriu és el *vèrtex de la paràbola* i la distància entre F i R és el *paràmetre de la paràbola*, $p = d(F, R)$.

Si la referència utilitzada és rectangular, el focus té coordenades $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ i la recta directriu té equació $y = -\frac{p}{2}$ o $2y + p = 0$ l'equació de la paràbola serà

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{|2y + p|}{2}\,.$$

Elevant al quadrat els dos costats de la igualtat, tenim que

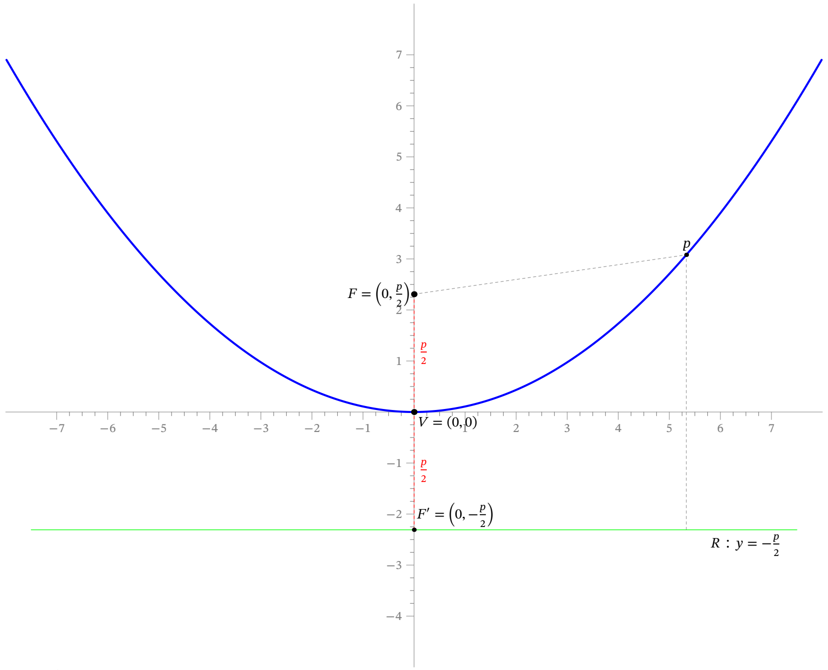
$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = \frac{4y^2 + 4py + p^2}{4}\,,$$

i aïllant la y, ens queda l'*equació reduïda de la paràbola*

$$y = \frac{x^2}{2p}\,.$$

El *vèrtex* de la paràbola és el punt de coordenades $V = (0, 0)$ i, a diferència de l'el·lipse i la hipèrbola, la paràbola només té *un eix de simetria*, l'eix d'ordenades.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí



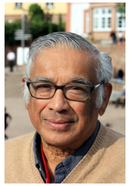
Exemple 4.29 Calculem el paràmetre i el focus de la paràbola

$$y=\frac{x^2}{8\sqrt{2}}$$

i la seva equació en la referència $\mathcal{R}'=\left\{(\sqrt{2},2\sqrt{2});\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$.

És evident que el paràmetre és $p=4\sqrt{2}$ i que el focus és el punt $F=(0,2\sqrt{2})$.
D'altra banda, les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{R}'$ a la referència canònica són

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\\ 4\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} \qquad \text{o bé,} \qquad \left.\begin{aligned} x&=\frac{2+x'+y'}{\sqrt{2}}\\ y&=\frac{4-x'+y'}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}.$$


Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per obtenir l'equació de la paràbola en la referència $\mathcal{R}'$ només cal que substituïm les expressions anteriors a l'equació

$$y = \frac{x^2}{8\sqrt{2}} \qquad \text{o} \qquad 8\sqrt{2}\,y = x^2\,,$$

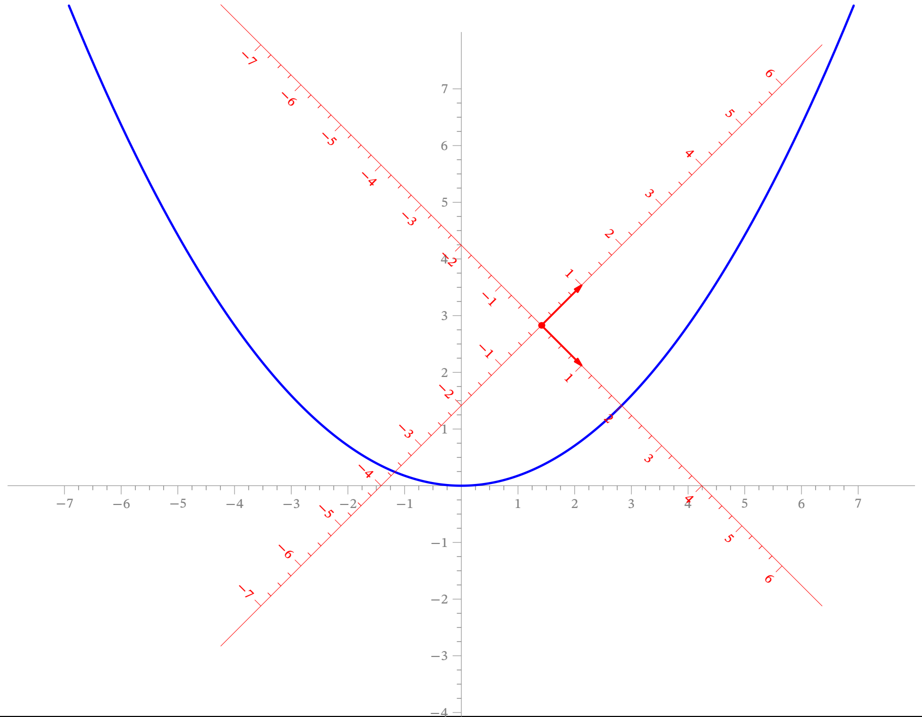
i obtenim

$$\frac{8\sqrt{2}(4 - x' + y')}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2 + x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$8(4 - x' + y') = \frac{(2 + x' + y')^2}{2}$$

$$16(4 - x' + y') = 4 + x'^2 + y'^2 + 4x' + 4y' + 2x'y'$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 + 20x' - 12y' - 60 = 0$$



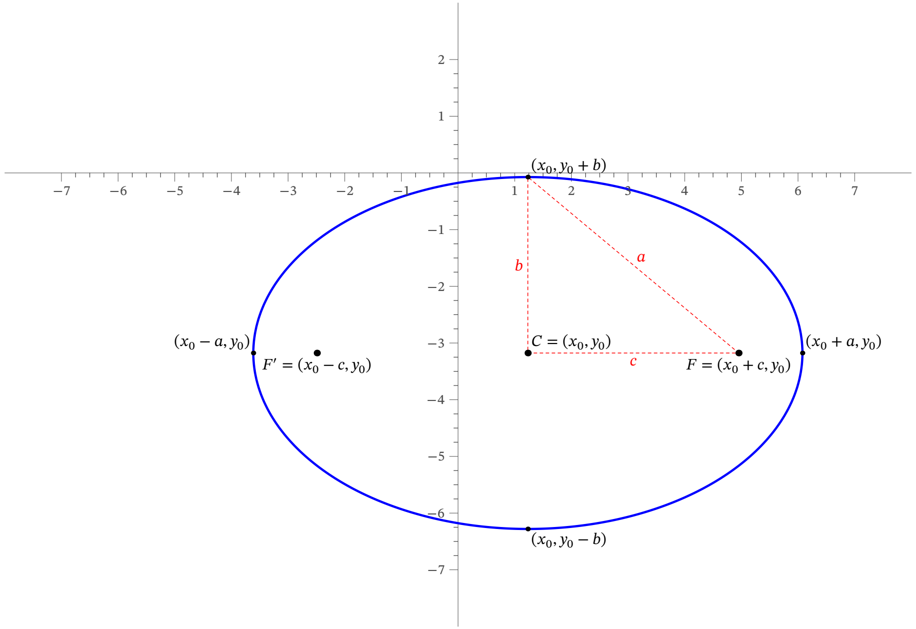

Yves Meyer

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 4.30 (a) Si una el·lipse té el centre en el punt $C = (x_0, y_0)$ i els eixos principals paral·lels als eixos de coordenades, la seva equació serà

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{amb} \qquad a > b\,,$$

i els seus focus seran els punts $F = (x_0 + c, y_0)$ i $F' = (x_0 - c, y_0)$.



El mateix podem dir per a les hipèrboles i aleshores tindran equació

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$


Alan Baker

De la mateixa manera, si una paràbola té el vèrtex en el punt $V = (x_0, y_0)$ i els eixos principals paral·lels als eixos de coordenades, la seva equació serà

$$y - y_0 = \frac{(x-x_0)^2}{2p}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Superfícies de revolució i quàdriques

Fins ara hem vist que *les equacions lineals en dues variables* defineixen una recta en el pla P_2, que les *equacions lineals en tres variables* defineixen un pla a l'espai P_3, que els *sistemes lineals de dues equacions amb tres incògnites* de rang 2 defineixen rectes a l'espai P_3 i que la circumferència, l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola queden caracteritzades per *equacions de segon grau en dues variables*.

En l'última secció d'aquest tema veurem com algunes superfícies a l'espai es poden representar mitjançant *equacions de segon grau en tres variables*. La més senzilla de totes elles és sens dubte l'esfera i tampoc és excessivament complicat considerar les superfícies de revolució obtingudes en fer girar una el·lipse, una hipèrbola, una paràbola o una recta al voltant d'un dels eixos de coordenades.

Esfera

Una **esfera** de centre en el punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i radi r és el lloc geomètric dels punts de l'espai P_3 tals que

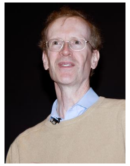
$$d(p, p_0) = r\,.$$

Si la referència utilitzada és rectangular, la seva equació és

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\,.$$

En particular, l'esfera centrada a l'origen de coordenades té equació $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ i podem pensar que s'obté fent girar la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = r^2$ al voltant de l'eix de les y.

El·lipsoide

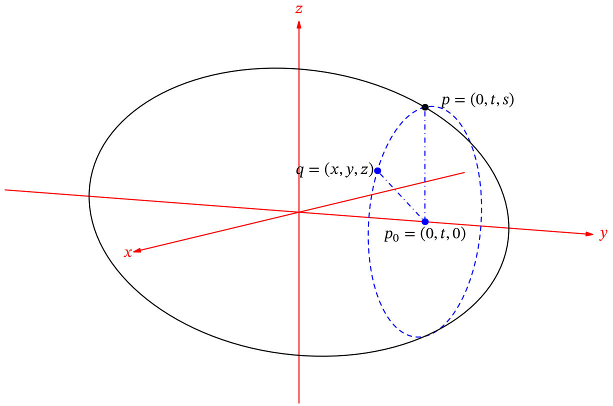

Andrew John Wiles

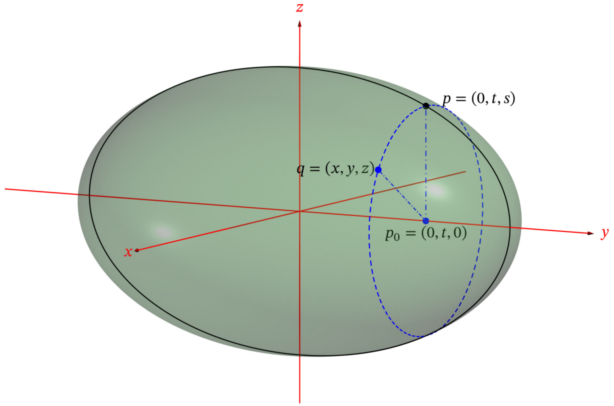
Suposem que en pla YZ tenim l'el·lipse d'equació

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

i la fem girar al voltant de les de les y. Per obtenir l'equació de la superfície de revolució obtinguda, considerem el gràfic següent

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí





Cada punt (x, y, z) de la superfície s'obté a partir d'un punt $p = (0, t, s)$ de l'el·lipse de partida, que per aquest motiu compleix,

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1\,.$$

D'altra banda, la circumferència obtinguda fent girar el punt p al voltant de l'eix de les y està continguda en el pla $y = t$ i té equació

$$\left.\begin{aligned} y &= t \\ x^2 + z^2 &= s^2 \end{aligned}\right\}\,.$$

Amb unes senzilles operacions, obtenim

$$\begin{gathered} \frac{t^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,. \end{gathered}$$


Lorenzo Mascheroni

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En general, anomenarem **el·lipsoide** de semieixos a, b i c amb $a, b, c > 0$ a la superfície definida per les solucions de l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

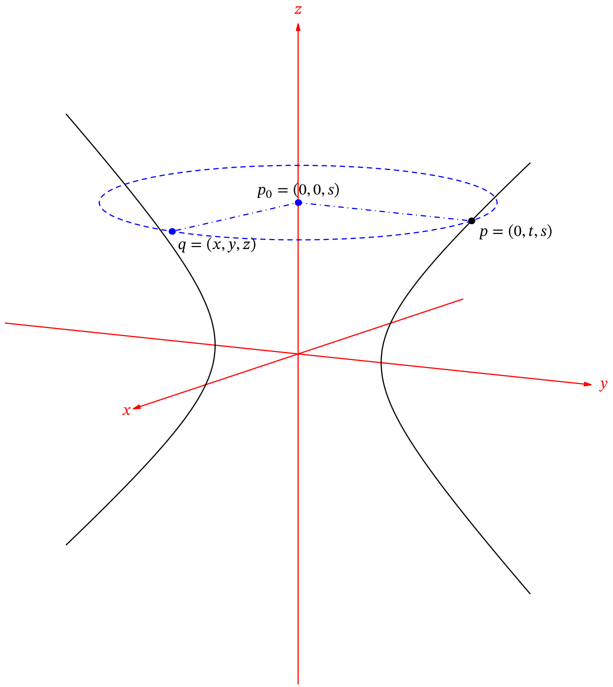
Hiperboloide d'una fulla

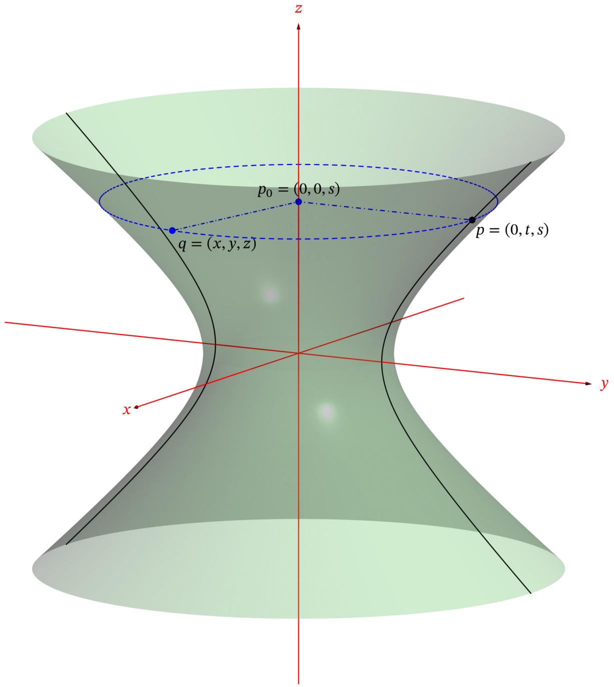
De manera semblant al cas anterior, considerem en el pla YZ, la hipèrbola d'equació

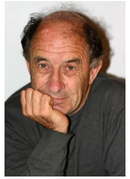
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1\,.$$

Si la fem girar al voltant de l'eix de les z, obtenim la superfície de revolució d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1\,.$$






Vladimir Igorevich Arnold

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En general, anomenarem **hiperboloide d'una fulla** de semieixos reals a i b i semieix imaginari c amb $a, b, c > 0$ a la superfície definida per les solucions de l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

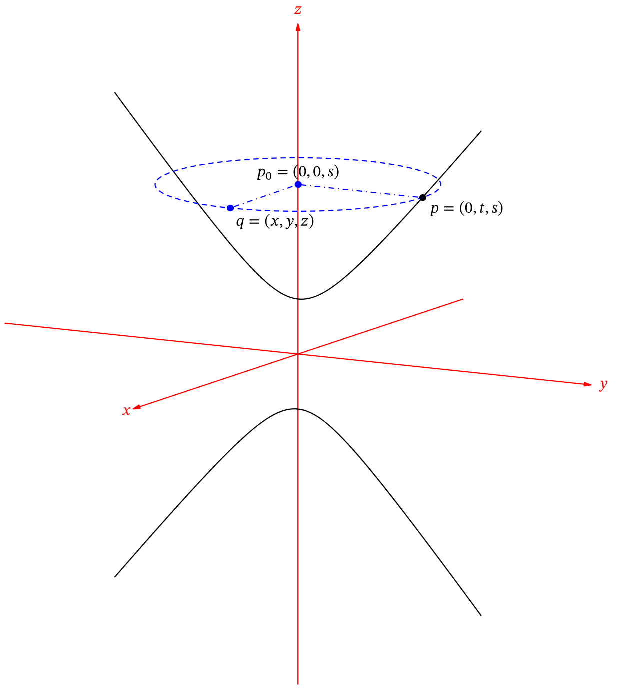
Hiperboloide de dues fulles

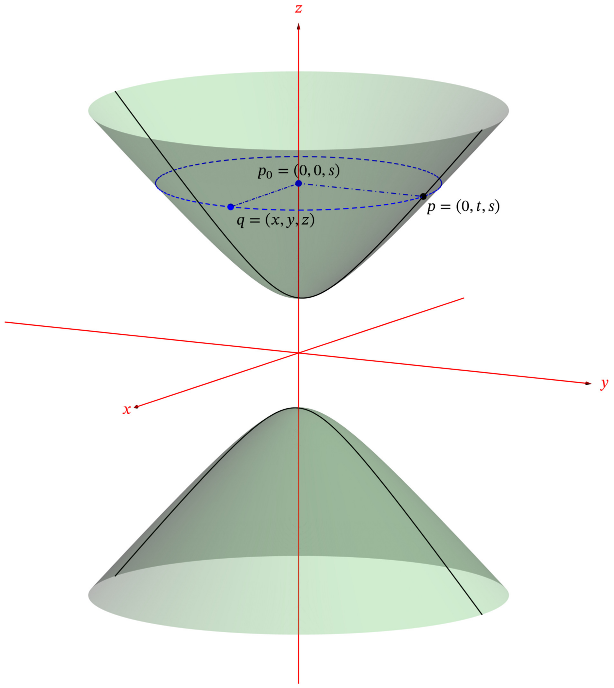
Considerem ara al pla YZ, la hipèrbola d'equació

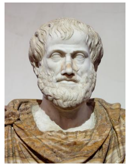
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1\,.$$

Si la fem girar al voltant de l'eix de les z, obtenim la superfície de revolució d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1\,.$$






Aristotle of Stagira

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Julia Hall Bowman Robinson

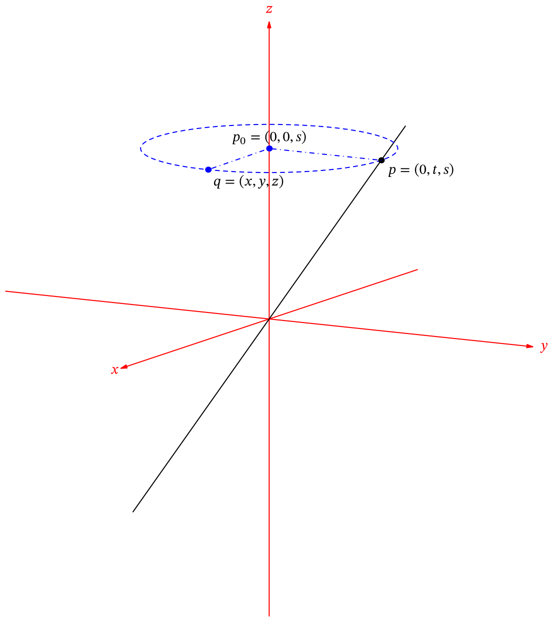
En general, anomenarem **hiperboloide de dues fulles** de semieix real c i semieixos imaginaris a i b amb $a, b, c > 0$ a la superfície definida per les solucions de l'equació

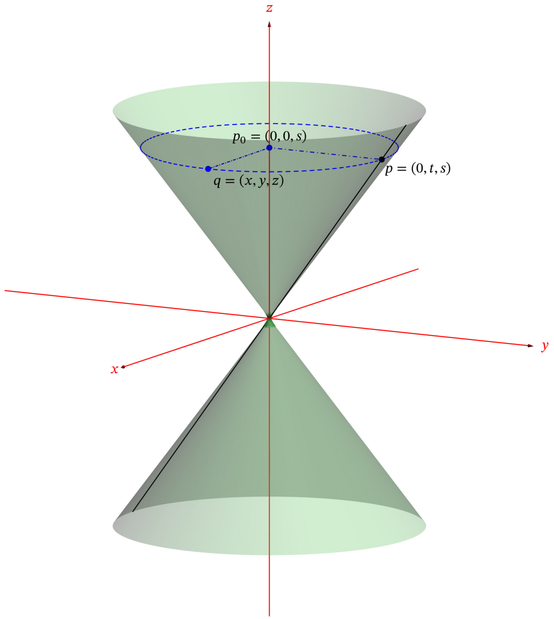
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\,.$$

Con

Donada la recta $z = ay$ $(a \neq 0)$ del pla YZ, si la fem girar al voltant de l'eix de les z obtindrem la superfície de revolució d'equació

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2} = 0\,.$$





En general, anomenarem **con** a la superfície definida per les solucions de l'equació

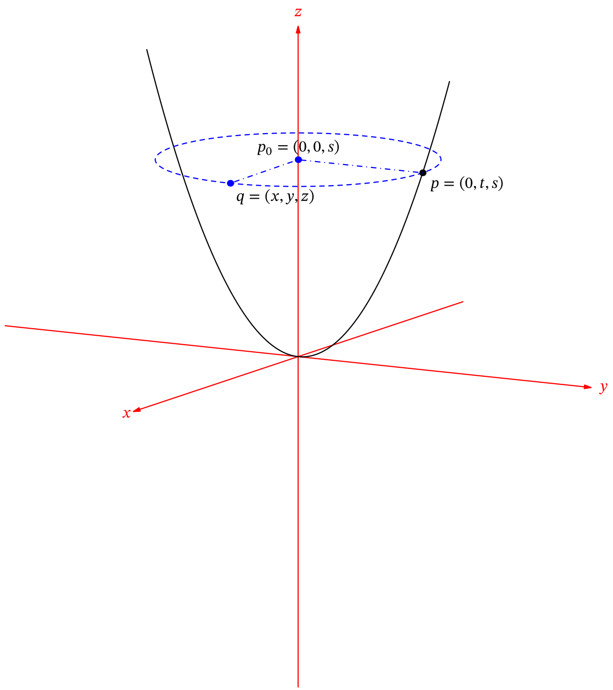
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,.$$

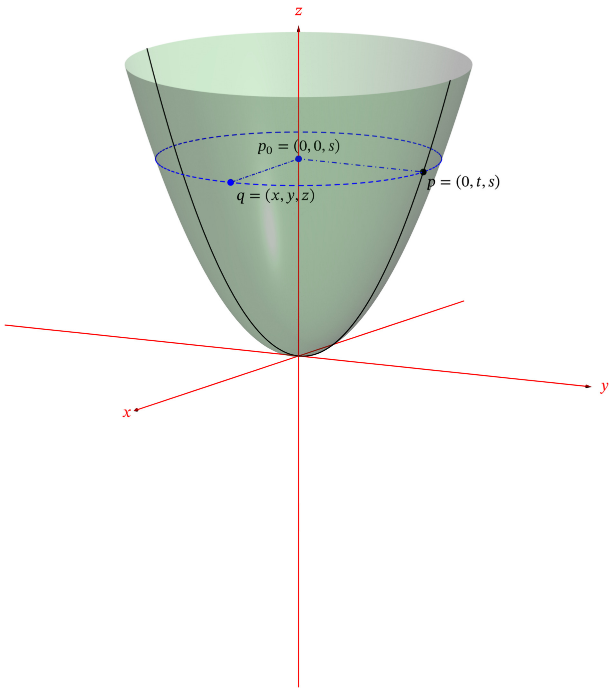
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Paraboloide el·líptic

De nou en el pla YZ considerem la paràbola d'equació $z = a^2y^2$ i fem-la girar al voltant de l'eix de les z; és immediat que obtindrem el paraboloide de revolució d'equació

$$z = a^2(x^2 + y^2)\,.$$






André-Marie Ampère

En general, anomenarem **paraboloide el·líptic** de semieixos a i b amb $a, b > 0$, a la superfície definida per les solucions de l'equació

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Johannes Kepler

Paraboloide hiperbòlic

Per semblança amb el paraboloide el·líptic, anomenarem **paraboloide hiperbòlic** de semieix real a i semieix imaginari b amb $a, b > 0$, a la superfície definida per les solucions de l'equació

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,.$$

Cilindre el·líptic

Si traslladem cada punt de l'el·lipse del pla XY d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

paral·lelament a l'eix de les z, obtenim una superfície anomenada **cilindre el·líptic** que té equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Cilindre hiperbòlic

Si traslladem cada punt de la hipèrbola del pla XY d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

paral·lelament a l'eix de les z, obtenim una superfície anomenada **cilindre hiperbòlic** que té equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Cilindre parabòlic

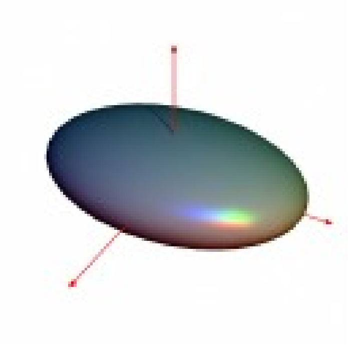
Si traslladem cada punt de la paràbola del pla XZ d'equació

$$z = \frac{x^2}{a^2}\,,$$

paral·lelament a l'eix de les y, obtenim una superfície anomenada **cilindre parabòlic** que té equació

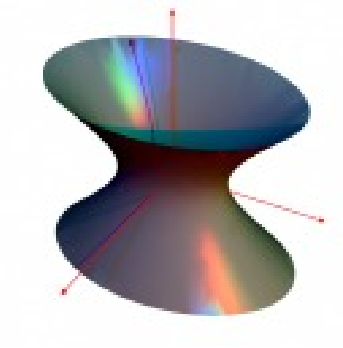
$$z = \frac{x^2}{a^2}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí



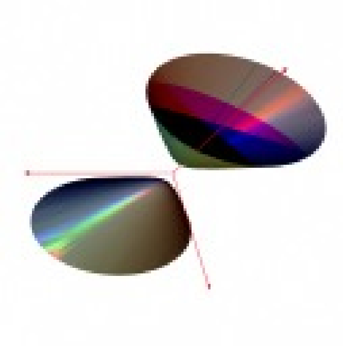
El·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



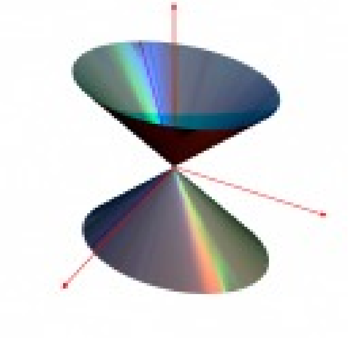
Hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



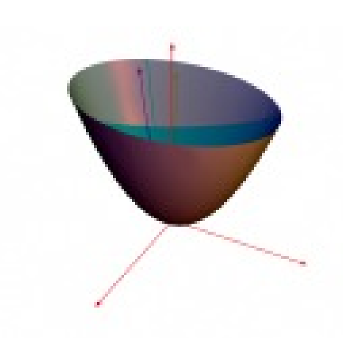
Hiperboloide de dues fulles

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



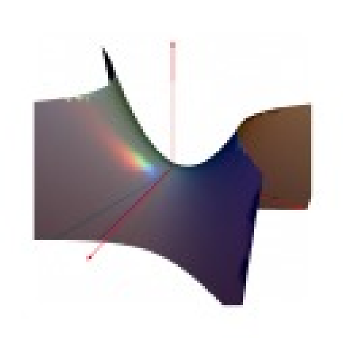
Con

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Paraboloide el·líptic

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

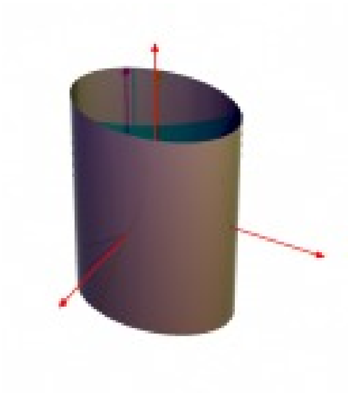


Paraboloide hiperbòlic

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

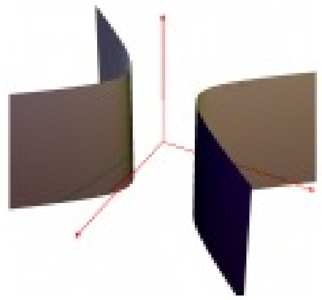
Gabriel Cramer

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí



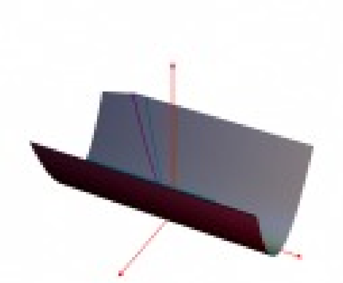
Cilindre el·líptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindre hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



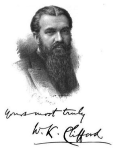
Cilindre parabòlic

$$z = \frac{x^2}{a^2}$$

Observació 4.31 Si en cada una de les equacions anteriors fem una permutació del eixos x, y i z obtenim una quàdrica del mateix tipus. Per exemple, la quàdrica d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1\,.$$

és un hiperboloide de dues fulles.



William Kingdon Clifford

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

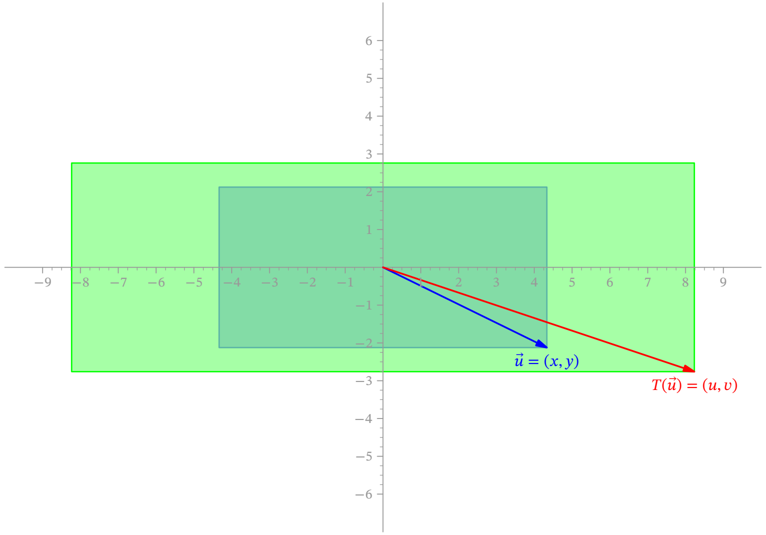
5 Transformacions lineals i afins

Les *transformacions lineals* i les *transformacions afins* modelen des d'un punt de vista matemàtic les transformacions geomètriques com l'escalat, els girs i rotacions i les translacions. Intuïtivament, una transformació és una funció o aplicació que a cada punt $p \in P_2$ ($p \in P_3$) o a cada vector $\vec{u} \in V_2$ ($\vec{u} \in V_3$) li fa correspondre un altre punt $T(p) \in P_2$ ($T(p) \in P_3$) o un altre vector $T(\vec{u}) \in V_2$ ($T(\vec{u}) \in V_3$).

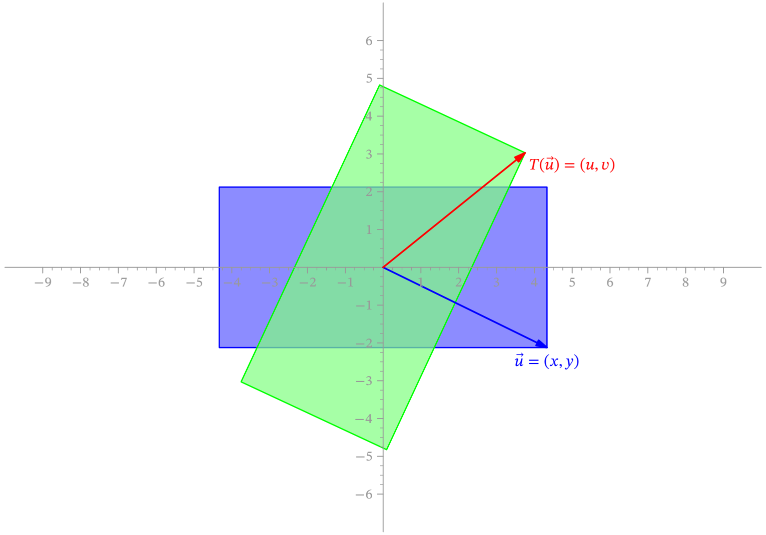
La idea bàsica és que les transformacions que impliquen translacions s'han de descriure en termes dels punts del pla o de l'espai i s'anomenen *transformacions afins*, mentre que les que no impliquen translacions es poden descriure en termes dels vectors del pla o de l'espai i s'anomenen *transformacions lineals*.

Transformacions lineals

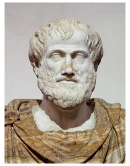
Comencem veient uns exemples d'escalats i girs.



Escalat de factors α i β



Gir d'angle α



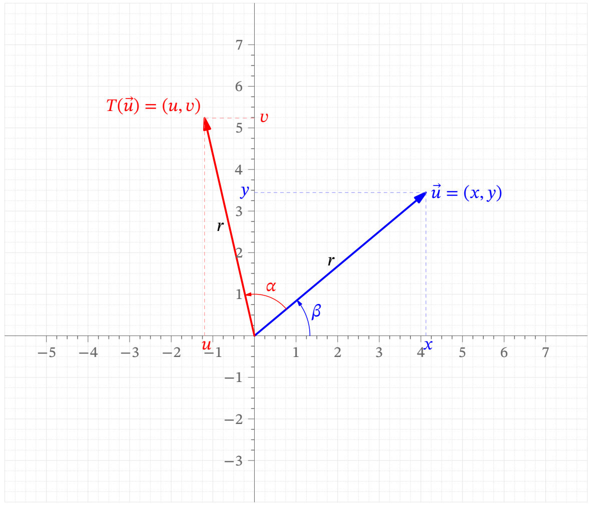
Aristotle of Stagira

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Les transformacions lineals d'escalat de coeficients α en la direcció de les x i β en la direcció de les y són les més senzilles i la seva expressió matemàtica és

$$\left.\begin{array}{l} u = \alpha x \\ v = \beta y \end{array}\right\} \qquad \text{o bé,} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Trobar l'expressió matemàtica d'*un gir d'angle α* en sentit antihorari és una mica més complicat. Per això, considerem el gràfic següent



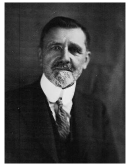
Gir d'angle α

Per a obtenir (u, v) en funció de (x, y), sigui r el mòdul de $\vec{u}$ i de $T(\vec{u})$. Aleshores, tenim que

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \end{array}\right\}$$

i

$$u = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$v = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$



Émile Borel

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{o be,} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple 5.1 La transformació lineal d'escalat de coeficients 3 en la direcció de les x i 2 en la direcció de les y ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

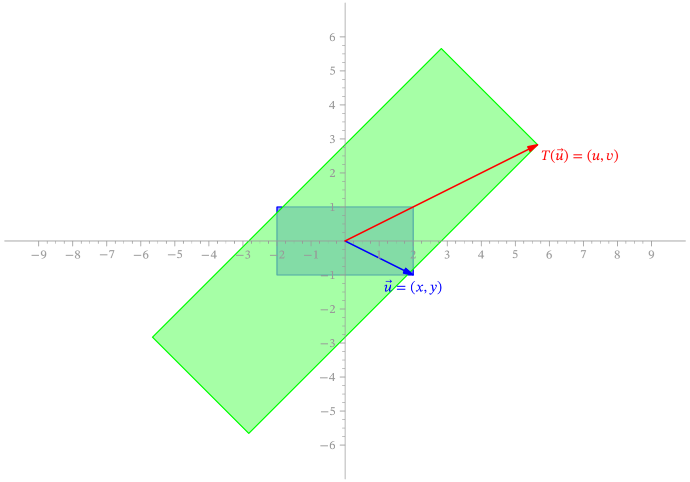
mentre que l'expressió del gir de 45° és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Podem combinar aquestes dues transformacions de dues maneres. Si primer apliquem l'escalat i després el gir tindrem que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En el gràfic podem veure com actua aquesta transformació sobre un rectangle de costats 4 i 2.



Escalat $(3, 2)$, i a continuació, gir de 45°

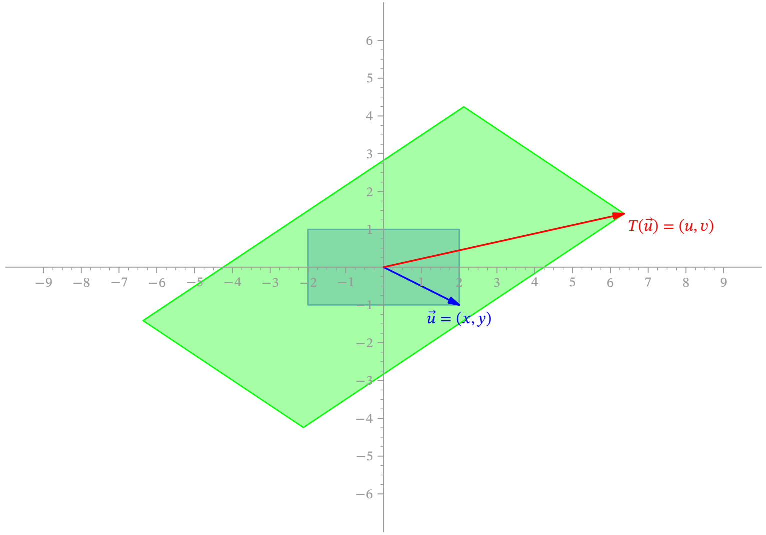
James Clerk Maxwell

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


David Bryant Mumford

Mentre que, si ho fem al revés, primer el gir i després l'escalat, el resultat és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



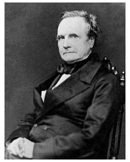
Gir de 45° i a continuació, escalat $(3, 2)$,

En dimensió 3, els escalats de coeficients α en la direcció de les x i β en la direcció de les y i γ en la direcció de les z venen donats per

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha x \\ v &= \beta y \\ w &= \gamma z \end{aligned}\right\} \qquad \text{o be,} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les rotacions en dimensió 3 són molt més complicades que els girs en dimensió 2 ja que la rotació pot ser al voltant de qualsevol eix. N'hi ha tres que són especialment senzilles, les rotacions al voltant de l'eix de les x, al voltant de l'eix de les y i al voltant de l'eix de les z.

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Charles Babbage

Així com en els girs, el sentit per defecte és sempre l'antihorari, en les rotacions, a més de l'eix de rotació, també hem d'especificar quin és el sentit de la rotació. En els tres casos anteriors, serà el determinat per la regla de la ma dreta amb el polze apuntant cap a la part positiva de l'eix.

Rotació al voltant de l'eix de les z

En una rotació d'angle α al voltant de l'eix de les z, aquest eix queda fix i, en el pla xy, es produeix un gir d'angle α en el sentit de la x cap a la y. Per tant, la seva representació és

$$\begin{gathered} w = z \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{gathered} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rotació al voltant de l'eix de les x

En una rotació d'angle α al voltant de l'eix de les x, aquest eix queda fix i, en el pla yz, es produeix un gir d'angle α en el sentit de la y cap a la z. Per tant, la seva representació és

$$\begin{gathered} u = x \\ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \end{gathered} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rotació al voltant de l'eix de les y

En una rotació d'angle α al voltant de l'eix de les y, aquest eix queda fix i, en el pla xz, es produeix un gir d'angle α en el sentit de la z cap a la x. Per tant, la seva representació és

$$\begin{gathered} v = y \\ \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \end{gathered} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Aquestes rotacions s'anomenen *rotacions elementals d'Euler*.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 5.2 Anomenarem **rotació amb angles d'Euler ψ, θ i ϕ** a la combinació de tres rotacions elementals d'Euler al voltant dels eixos següents:

(a) Rotació d'angle ψ al voltant de l'eix de les z.

(b) Rotació d'angle θ al voltant de l'eix de les x.

(c) Rotació d'angle ϕ al voltant de l'eix les z.

Observació 5.3 En disciplines com la mecànica quàntica, l'estudi d'òrbites de satèl·lits o diferent software matemàtic s'utilitzen també altres combinacions d'eixos, com per exemple, zyz, zyx o xyz. De fet, en total hi ha 12 possibles combinacions d'eixos a l'hora de parlar d'angles d'Euler.

La rotació amb angles d'Euler ψ, θ i ϕ ve donada per

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi\cos\theta & -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\sin\phi\cos\theta & \sin\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi\cos\theta & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\theta & -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Definició 5.4 Anomenarem **transformació lineal de V_3** a qualsevol transformació T que es pugui representar en forma matricial com a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$


Pietro Mengoli

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

De manera semblant, anomenarem **transformació lineal de V_2** a qualsevol transformació T que es pugui representar en forma matricial com a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les matrius

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

s'anomenen *matriu de la transformació lineal en la base canònica*. Observem que les columnes d'aquestes matrius representen els vectors en que s'han transformat els vectors de la base canònica. En dimensió 3

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= (a_1^1, a_2^1, a_3^1) \\ T(0,1,0) &= (a_1^2, a_2^2, a_3^2) \\ T(0,0,1) &= (a_1^3, a_2^3, a_3^3) \end{aligned}\right\},$$

mentre que en dimensió 2, tenim que

$$\left.\begin{aligned} T(1,0) &= (a_1^1, a_2^1) \\ T(0,1) &= (a_1^2, a_2^2) \end{aligned}\right\},$$

També és habitual representar aquestes transformacions de la forma següent

$$T(x,y,z) = (a_1^1 x + a_1^2 y + a_1^3 z, a_2^1 x + a_2^2 y + a_2^3 z, a_3^1 x + a_3^2 y + a_3^3 z)$$

i

$$T(x,y) = (a_1^1 x + a_1^2 y, a_2^1 x + a_2^2 y)$$

Proposició 5.5 *Una funció o transformació $T : V \longrightarrow V$ és una transformació lineal si, i només si, compleix*

- $T(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2)$ *per a tota parella de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$.*
- $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$ *per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$ i tot $\vec{u} \in V$*


Johannes Kepler

Si $T : V \longrightarrow V$ és una transformació lineal i $\vec{v} = T(\vec{u})$, direm que $\vec{v}$ és **la imatge** de $\vec{u}$ i que $\vec{u}$ és **una antiimatge** de $\vec{v}$. Observem que cada vector té una única imatge, mentre que un vector pot no tenir antiimatge, tenir-ne una o tenir-ne infinites.

Exemple 5.6 La transformació lineal de V_2 donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

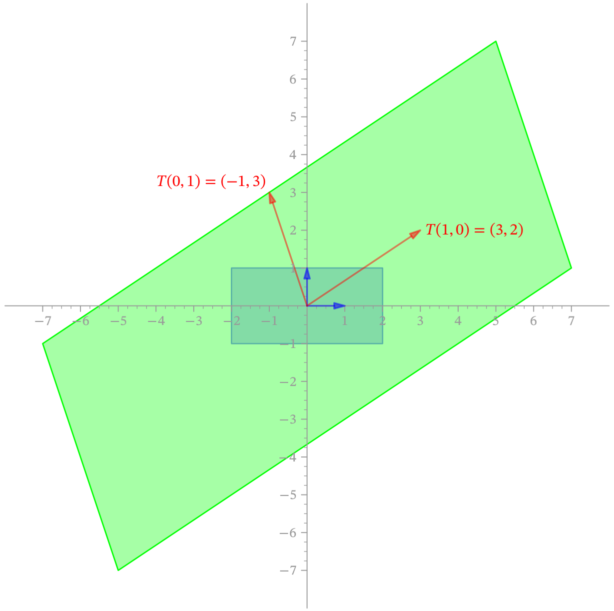
també es pot escriure

$$T(x, y) = (3x - y, 2x + 3y)$$

i la seva matriu en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En el grafic següent podem veure com es transforma un rectangle de costats 4 i 2 i també, com es transformen els vectors de la base canònica.



Pierre-Simon Laplace

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 5.7 Tota transformació lineal de V_2 o V_3 queda totalment determinada si coneixem les imatges dels vectors d'una base.

Exemple 5.8 La transformació lineal $T : V_3 \longrightarrow V_3$ compleix que

$$\left.\begin{aligned} T(1,2,-2) &= (1,0,1) \\ T(2,3,-4) &= (1,1,0) \\ T(2,-1,-3) &= (0,-1,1) \end{aligned}\right\},$$

anem a calcular la seva matriu en la base canònica.

Hem de trobar una matriu que compleixi

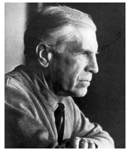
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En lloc d'intentar trobar els seus coeficients per separat, ho farem de manera global. La matriu A ha de complir que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aleshores, agrupant aquestes tres igualtats en un únic producte de matrius, tenim que

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Lev Semenovich Pontryagin

Finalment, aïllem la matriu A multiplicant per la inversa als dos costats:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 8 \\ -8 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -10 & -1 & -6 \\ 15 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

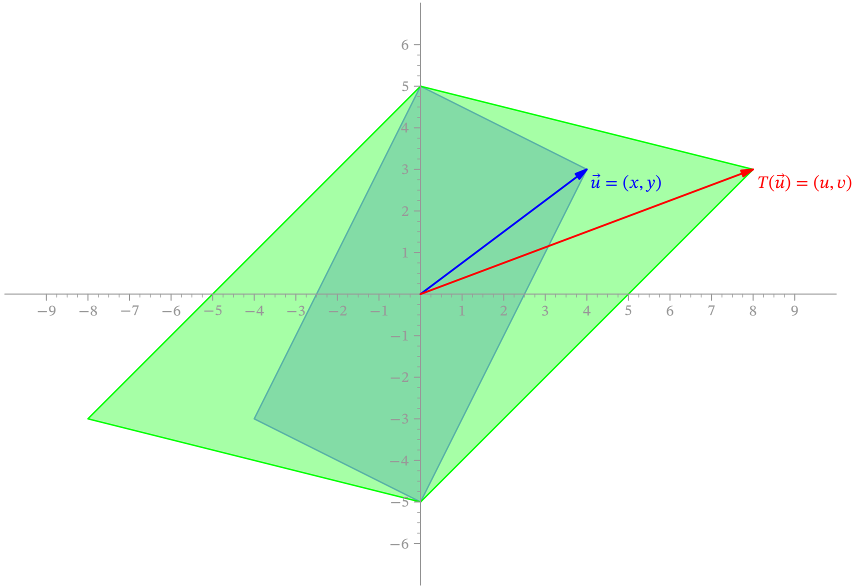
Per tant, la transformació lineal T ve donada per

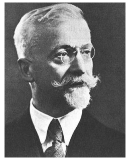
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -10 & -1 & -6 \\ 15 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o bé $T(x, y, z) = (5x + y + 3z, -10x - y - 6z, 15x + 2y + 9z)$.

Fórmula del canvi de base per a transformacions lineals

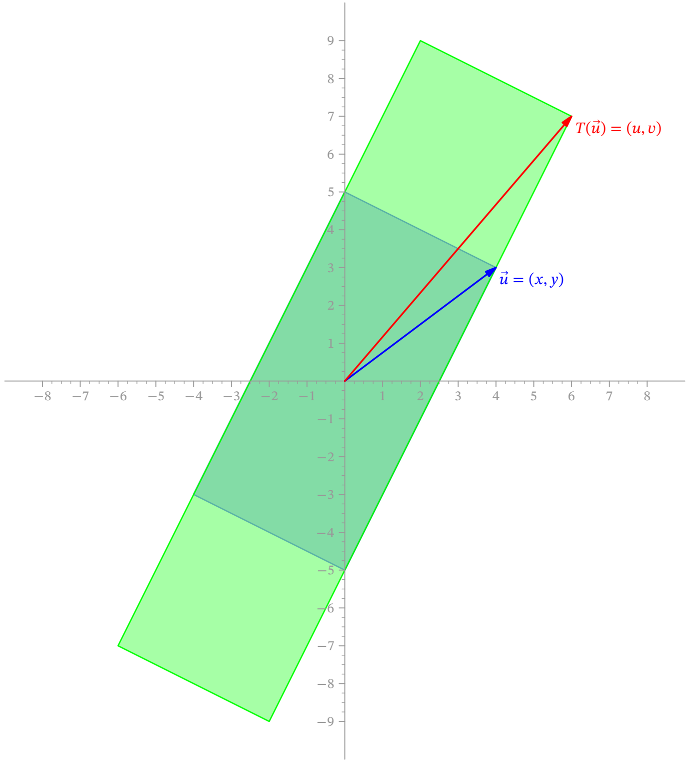
Considerem el rectangle de vèrtexs $(4, 3)$, $(0, 5)$, $(-4, -3)$ i $(0, -5)$. Si li apliquem l'escalat de factors 2 i 1 en les direccions dels eixos x i y, a la figura següent podem veure com es transforma





Élie Cartan

Però, el que volem és escalar-lo amb factors 2 i 1 en les direccions dels seus costats, és a dir, 2 en la direcció del vector $(1,2)$ i 1 en la direcció $(-2,1)$, per a obtenir la figura següent



La qüestió és com podem trobar la representació matemàtica d'aquesta transformació,

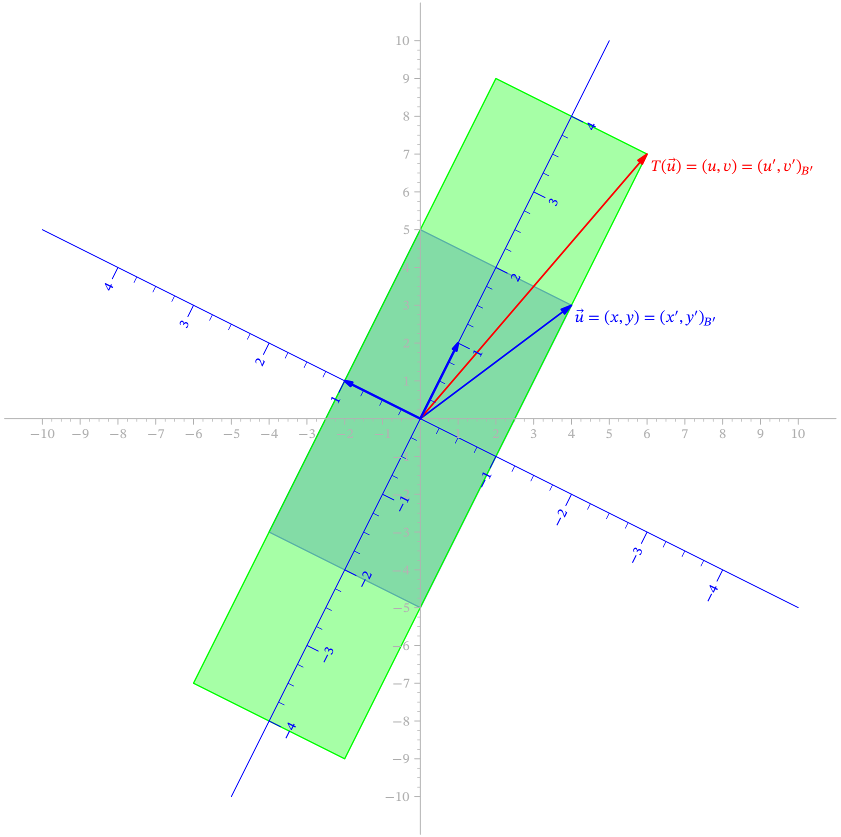
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Per això considerem els eixos de coordenades determinats per la base $\mathcal{B}' = \{(1,2), (-2,1)\}$, formada pel vector que ens dona la direcció de l'escalat i un vector perpendicular a aquesta direcció (uns eixos *"locals"* del rectangle).


Bonaventura Francesco Cavalieri

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

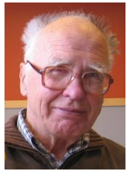
Aleshores tenim el gràfic



del que veiem que

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

i, per tant, només ens queda calcular (u, v) en funció de (x, y).


Lennart Axel Edvard Carleson

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Henri Poincaré

Del canvi de base per a vectors de V_2 (3.12), tenim que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

per tant,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, l'escalat de factor 2 en la direcció del vector $(1, 2)$ ve donat per l'expressió

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De fet, amb aquest exemple, hem vist un resultat molt més general

Teorema 5.9 *Siguin A la matriu d'una transformació lineal T en la base canònica i A' la matriu de T en la base $\mathcal{B}'$. Si C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica, tindrem que*

$$A = CA'C^{-1} \qquad i \qquad A' = C^{-1}AC.$$

A més, $\det A = \det A'$ i $\text{traça}(A) = \text{traça}(A')$, on la traça d'una matriu quadrada és la suma dels coeficients de la diagonal principal.

Exemple 5.10 Sigui T la transformació lineal definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

anem a calcular la matriu de T en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,2)\}$.
En aquest cas, la matriu de la transformació lineal en la base canònica és

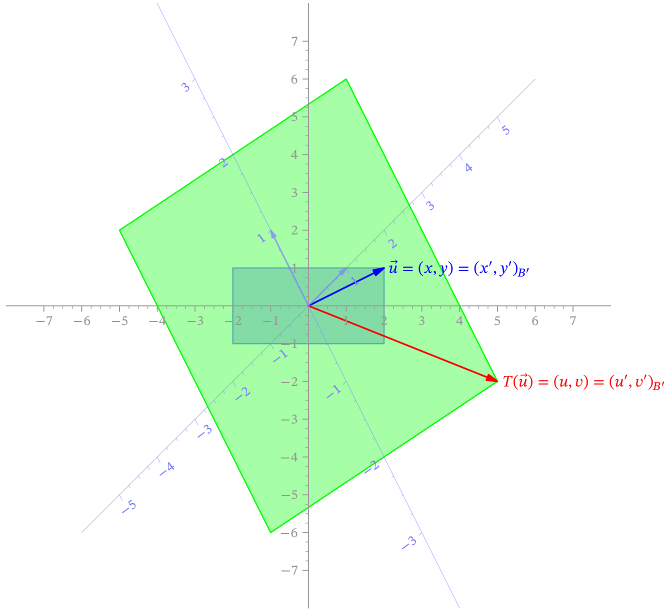
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

i la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la matriu de T en la base $\mathcal{B}'$ és

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$




Hypatia of Alexandria

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


François Viète

Per tant, la matriu de la transformació lineal T en la base $\mathcal{B}'$ és

$$A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és a dir,} \qquad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Rotacions i quaternions

Al diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans podem trobar diferents accepcions de la paraula ***rotació***:

- Moviment d'un sòlid els punts del qual descriuen circumferències amb els centres alineats i fixos, continguts en l'eix de rotació.
- Transformació geomètrica que consisteix a girar, un angle donat, els punts del pla o de l'espai al voltant d'un punt o d'una recta.
- Moviment d'un astre entorn d'un eix. La rotació de la Terra.

De fet, intuïtivament menys o menys tenim clar què és un moviment de rotació, però definir-lo matemàticament no és tan senzill. Ja hem parlat de les rotacions al voltant dels eixos x, y i z, i ara anem a definir el concepte de rotació al voltant d'un eix o, més precisament, *rotació al voltant d'un vector*.

Definició 5.11 Donat un *vector $\vec{w}$ no nul de V_3* i un *angle α*, anomenarem **rotació d'angle α al voltant del vector $\vec{w}$** a la transformació lineal de V_3 que en la base ortonormal positiva $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ve donada per

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

on el vector $\vec{u}_1$ de la base $\mathcal{B}'$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{w}$.

Exemple 5.12 Càlcul de la matriu en la base canònica de la rotació de 120° al voltant del vector $\vec{w} = (1, -1, 1)$.
Tal com diu la definició anterior, hem de trobar una base ortonormal positiva $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tal que $\vec{u}_1$ tingui la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{w} = (1, -1, 1)$. Com que $\vec{u}_1$ ha de ser unitari, ha de ser el vector

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Com a $\vec{u}_2$ es pot escollir qualsevol vector unitari perpendicular a $\vec{u}_1$ i hi ha infinites opcions, una de les quals és

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

i, aleshores, el vector $\vec{u}_3$ serà el producte vectorial dels dos anteriors,

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\,.$$

Per tant, com a base $\mathcal{B}'$ tenim

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$$

i la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A més, aquesta matriu és ortogonal i, per tant, la seva inversa és la seva transposada, $C^{-1} = C^t$. D'altra banda, la matriu A' és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ 0 & \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

i, per la fórmula del canvi de base, tenim que

$$A = CA'C^{-1} = CAC^t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$


John Wallis

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & -2 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la rotació de 120° al voltant del vector $(1,-1,1)$ ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Proposició 5.13 *Una transformació lineal de V_3*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

és una rotació si, i només si, A és ortogonal ($A^tA = I$) i $\det A = 1$.

Observacions 5.14 (a) Tota rotació es pot posar com a rotació amb angles d'Euler ψ, θ i ϕ i aquests es poden calcular de la forma següent:

- Si $a_3^3 \neq \pm 1$,

$$\psi = \operatorname{atan2}(a_3^1, a_3^2), \qquad \theta = \arccos(a_3^3) \qquad \text{i} \qquad \phi = \operatorname{atan2}(a_1^3, -a_2^3).$$

  amb $\theta \in [0,\pi]$ i $\operatorname{atan2}(b,a)$ és l'angle que forma el vector (a,b) amb el semieix positiu de les x, per tant, estarà a l'interval $[0,2\pi)$.

- Si $a_3^3 = \pm 1$, aleshores $\sin\theta = 0$, l'eix de les z queda invariant i les dues rotacions al voltant d'aquest eix es redueixen a una, és a dir, podem prendre $\phi = 0$

$$\psi = \operatorname{atan2}(a_3^3 a_2^1, a_1^1), \qquad \theta = \arccos(\pm 1) = 0 \text{ o } \pi \qquad \text{i} \qquad \phi = 0.$$


Thoralf Albert Skolem

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

(b) L'eix de rotació d'una rotació ve donat per un vector $\vec{w}$ que compleix $T(\vec{w}) = \vec{w}$ i l'angle de rotació compleix que

$$\cos\alpha = \frac{-1 + \text{traça}(A)}{2}\,.$$

En l'exemple anterior, és immediat calcular els angles d'Euler

$$\psi = \text{atan2}(1,0) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{i} \qquad \phi = \text{atan2}(0,1) = 0\,,$$

és a dir, la rotació de 120° al voltant del vector $(1,-1,1)$ és equivalent a la rotació de 90° al voltant de l'eix de les z seguida d'una rotació de 90° al voltant de l'eix de les x.

Exemple 5.15 Sigui T la transformació lineal de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comprovem que T és una rotació i calculem els seus angles d'Euler i l'eix i angle de rotació.

Per comprovar que és una rotació hem de veure que $A^tA = I$ i que $\det(A) = 1$.

$$A^tA = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i

$$\det A = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^3 \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = 1\,.$$

Per tant, T és una rotació.

Els seus angles d'Euler són

$$\psi = \text{atan2}(2,2) = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{i} \qquad \phi = \text{atan2}(2,2) = \frac{\pi}{4}\,,$$


Eugène Charles

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per trobar l'eix de rotació, hem de trobat un vector $\vec{w}=(x,y,z)$ tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \text{o bé,} \qquad \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\sqrt{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si passem els termes de la dreta de la igualtat a l'esquerra, ens queda que

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\\ \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -2\\ 2 & 2 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

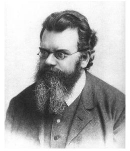
i ara, resolem aquest sistema d'equacions pel mètode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 0\\ \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -2 & 0\\ 2 & 2 & -2\sqrt{2} & 0\end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim F_2+F_1\\ F_3\sim\sqrt{2}F_3+2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & -4\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Per tant, la solució d'aquest sistema d'equacions és

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\,z\\ y=0\end{array}\right\}$$

i prenem com a eix de rotació el determinat pel vector $\vec{w}=(\sqrt{2},0,1)$.


Ludwig Boltzmann

D'altra banda, si l'angle de rotació és α, sabem que

$$\cos\alpha=\frac{-1+\text{traça}(A)}{2}=\frac{-1}{2},$$

per tant, podem assegurar que $\alpha=120^\circ$ o $\alpha=240^\circ$.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Charles Hermite

Per determinar quin dels dos és, escollim un vector qualsevol, per exemple, $\vec{u} = (2,0,0)$ i calculem la seva imatge $T(\vec{u})$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i el determinant

$$\det\left(\vec{w}, \vec{u}, T(\vec{u})\right) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\,.$$

Amb aquest resultat, podem assegurar que T és la rotació de 120° al voltant del vector $\vec{w} = (\sqrt{2}, 0, 1)$.

Quaternions

Els quaternions varen ser ideats per William Rowan Hamilton l'any 1843 com a extensió dels nombres complexos, de manera que incloguessin les magnituds escalars i vectorials

Definició 5.16 Els **quaternions** són les expressions de la forma

$$w = a + bi + cj + dk \qquad \text{amb} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

El conjunt de tots els quaternions es representa per $\mathbb{H}$.

La suma de quaternions i el producte d'un quaternió per un nombre real es defineixen de la manera habitual. Si $w_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $w_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ i $t \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\ tw_1 &= t(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = ta_1 + tb_1 i + tc_1 j + td_1 k\,, \end{aligned}$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

mentre que el producte es defineix a partir de les igualtats

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,, \qquad ij = -ji = k\,, \qquad jk = -kj = i \qquad \text{i} \qquad ki = -ik = j\,.$$

Definició 5.17 Donat un quaternió $w = a + bi + cj + dk$, la seva norma és

$$\| w \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

i el seu conjugat

$$w^* = a - bi - cj - dk$$

Donat un quaternió $w = a + bi + cj + dk$, el coeficient a s'anomena part escalar de w i el terme $bi + cj + dk$, part vectorial de w i s'identifica amb el vector de V_3 $\vec{w} = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k} = (b, c, d)$. Aleshores, és habitual escriure $w = a + \vec{w}$.

Proposició 5.18 *Donats dos quaternions $w_1 = a_1 + \vec{w}_1$ i $w_2 = a_2 + \vec{w}_2$, el seu producte és*

$$w_1 w_2 = a_1 a_2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 + a_1 \vec{w}_2 + a_2 \vec{w}_1 + \vec{w}_1 \times \vec{w}_2\,.$$

Exemple 5.19 Calculem el producte dels quaternions $w_1 = 3 + i - 2j + k$ i $w_2 = 2 - i + 2j + 3k$.
Els productes escalar i vectorial de les seves parts vectorials són

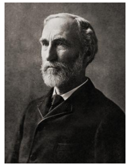
$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = (1, -2, 1) \cdot (-1, 2, 3) = -2 \qquad \text{i} \qquad \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -4, 0)\,.$$

Aleshores,

$$w_1 w_2 = 6 - (-2) + 3(-i + 2j + 3k) + 2(i - 2j + k) + (-8i - 4j) = 8 - 9i - 2j + 11k\,.$$

Solomon Lefschetz

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Josiah Willard Gibbs

Una de les utilitats dels quaternions és la seva relació amb les rotacions de V_3 i són més eficients que els angles d'Euler i les matrius de rotacions i s'utilitzen en gràfics per ordinador, robòtica, aeronavegació i càlcul d'òrbites de satèl·lits.

Teorema 5.20 *Si $\vec{w}$ és un vector unitari de V_3 i α un angle qualsevol, considerem el quaternió $q = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{w}$. Aleshores, si $\vec{u}$ és un vector de V_3 i $u = 0 + \vec{u}$ el seu quaternió associat, la rotació d'angle α al voltant del vector $\vec{w}$ ve donada per*

$$T(\vec{u}) = quq^*\,.$$

Observacions 5.21 (a) Siguin $q = a + \vec{w}$ un quaternió unitari, $\vec{u}$ un vector de V_3 i $u = 0 + \vec{u}$ el seu quaternió associat, aleshores

$$quq^* = (2a^2 - 1)\vec{u} + 2(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{w} + 2a(\vec{w}\times\vec{u})\,.$$

(b) En la situació del teorema anterior, tindrem que

$$T(\vec{u}) = \cos\alpha\,\vec{u} + (1-\cos\alpha)(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{w} + \sin\alpha\,(\vec{w}\times\vec{u})\,,$$

coneguda com a *fórmula de Rodrigues*. D'altra banda, si escrivim $q = a + bi + cj + dk$, la rotació d'angle α al voltant del vector $\vec{w}$ ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2+2b^2-1 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & 2a^2+2c^2-1 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & 2a^2+2d^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\,. \tag{5.1}$$

(c) Els quaternions q *i* $-q$ *defineixen la mateixa rotació*. Per tant, la correspondència entre rotacions i quaternions no és única.

Exemple 5.22 Càlcul de la matriu i la representació en la base canònica de la rotació de 60° al voltant del vector $\vec{u} = (1,1,1)$.
Si dividim el vector $\vec{u}$ per la seva longitud, tindrem un vector unitari al voltant del qual es fa la rotació,

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,,$$

aleshores, el quaternió corresponent a aquesta rotació és

$$q = \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{\sqrt{3}}{6}(3+i+j+k)\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Gerbert Aurillac

Per tant, tenim que

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{6}, \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad \text{i} \qquad d = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

i, en substituir a la matriu anterior, tindrem que

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.23 Donada la rotació T de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

calculem l'eix i l'angle de rotació.

Sigui $q = a + bi + cj + dk$ el quaternió unitari que defineix aquesta rotació. Sumant les igualtats

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 - 1 &= \frac{1}{2} \\ 2a^2 + 2c^2 - 1 &= 0\,, \\ 2a^2 + 2d^2 - 1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

i tenint en compte que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, obtenim que

$$\begin{aligned} 6a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 3 &= 1 \\ 4a^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 &= 4 \\ 4a^2 + 2 &= 4 \\ a^2 &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Com que un quaternió i el seu oposat defineixen la mateixa rotació, podem escollir la a positiva.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Peter Lejeune Dirichlet

Per tant, agafem

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Substituint a les equacions 5.2, obtenim que

$$b^2 = \frac{1}{4}\,, \qquad c^2 = 0 \qquad \text{i} \qquad d^2 = \frac{1}{4}$$

$$b = \pm\frac{1}{2}\,, \qquad c = 0 \qquad \text{i} \qquad d = \pm\frac{1}{2}\,.$$

Tenint en compte que $c = 0$, la matriu 5.1 queda

$$A = \begin{pmatrix} 2a^2 + 2b^2 - 1 & -2ad & 2bd \\ 2ad & 2a^2 - 1 & -2ab \\ 2bd & 2ab & 2a^2 + 2d^2 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i de les igualtats $2ab = \dfrac{2}{2\sqrt{2}}$ i $2ad = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}}$, obtenim que

$$b = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad d = -\frac{1}{2}\,.$$

Per tant,

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i-k}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}(1,0,-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\,,$$

i això en permet assegurar que es tracta de la rotació d'angle α al voltant del vector $(1,0,-1)$ amb

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$$

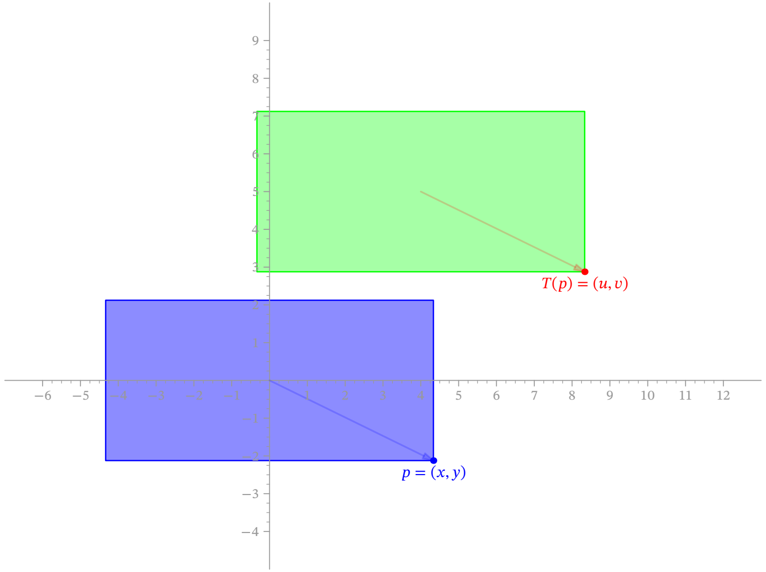
i T és la rotació de 90° al voltant del vector $(1,0,-1)$.

Observem que el quaternió $-q = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i-k}{2}$ defineix exactament la mateixa rotació.

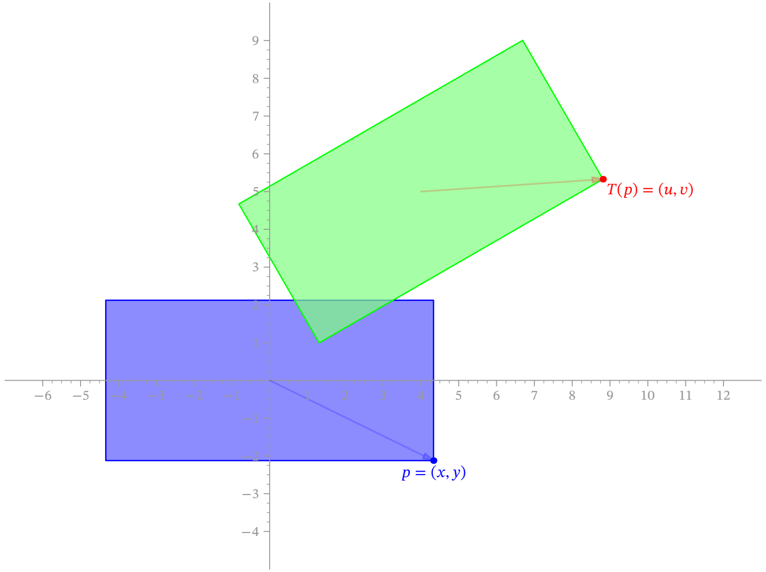
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Transformacions afins

Comencem també amb dos exemples, una translació i un gir seguit d'una translació,



Translació de $(4, 5)$



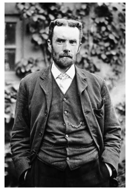
Gir de 30° seguit de la translació de $(4, 5)$

És fàcil veure que la translació s'expressa matemàticament com a

$$\left.\begin{aligned} u &= 4 + x \\ v &= 5 + y \end{aligned}\right\} \qquad \text{o bé,} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mentre que el gir seguit de rotació vindrà donat per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Oliver Heaviside

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 5.24 Anomenarem **transformació afí de P_3** a qualsevol transformació T que es pugui representar en forma matricial com a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ara, (x, y, z) són les coordenades d'un punt qualsevol de P_3 i (u, v, w) són les coordenades del punt resultant de la transformació, anomenat també *imatge* de (x, y, z).

De manera semblant, anomenarem **transformació afí de P_2** a qualsevol transformació T que es pugui representar en forma matricial com a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Observació 5.25 Podem veure que tota transformació afí es pot posar com una transformació lineal seguida d'una translació. Possiblement, les transformacions afins més interessants són els girs respecte un punt, les rotacions al voltant d'una recta donada per un punt de pas i el vector director i els moviments helicoïdals.

Gir d'angle α al voltant d'un punt (x_0, y_0)


Julia Hall Bowman Robinson

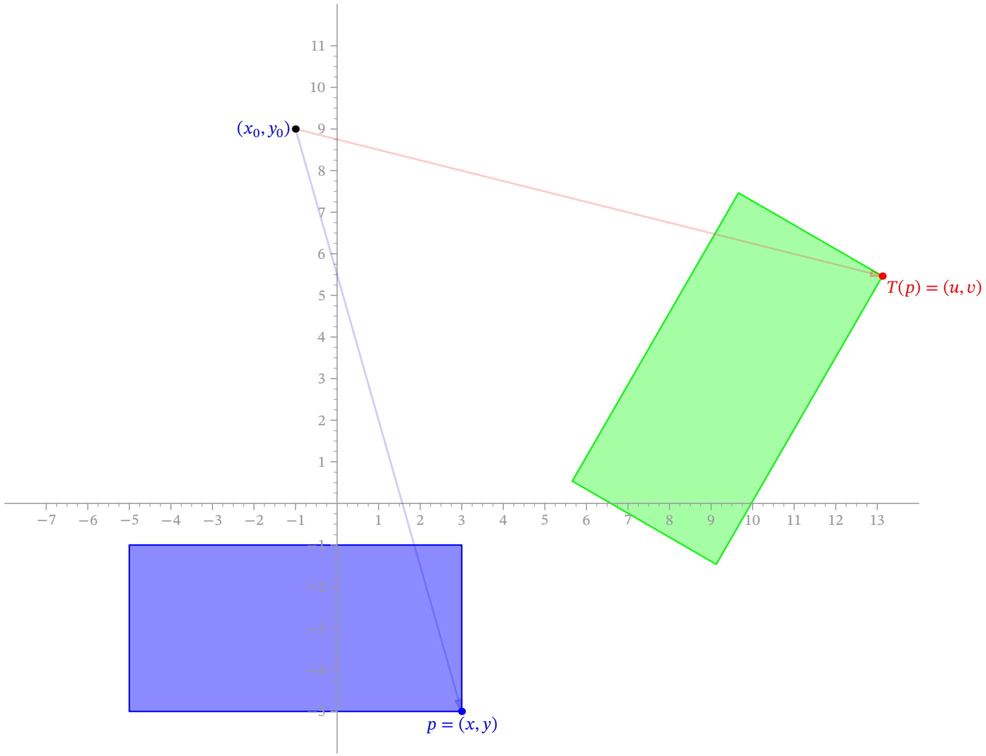
Tal com es pot veure a la figura següent, aquesta transformació afí ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Observem que multipliquem la matriu del gir pel vector d'origen (x_0, y_0) i extrem (x, y).

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$



Exemple 5.26 Si fem un gir de 60° al voltant del punt $(-1, 9)$, tindrem que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+9\sqrt{3} \\ 9+\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Raphael Bombelli

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Rotació d'angle α al voltant d'una recta

Sigui R una recta de l'espai que passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vector director $\vec{w}$. Si A és la matriu de la rotació (transformació lineal) d'angle α al voltant del vector $\vec{w}$, la rotació d'angle α al voltant de la recta R és la transformació afí donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.27 Anem a calcular la rotació de 60° al voltant de la recta R que passa pel punt $(-1, 2, -3)$ i té vector director $\vec{w} = (1, 1, 1)$. A l'exemple 5.22 ja hem trobat la matriu de la rotació de 60° al voltant del vector $\vec{w} = (1, 1, 1)$:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

aleshores la rotació de 60° al voltant de la recta R ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Moviment helicoïdal

Sigui R una recta de l'espai afí que passa pel punt (x_0, y_0, z_0) i té vector director $\vec{w}$, un moviment helicoïdal és una rotació d'angle α al voltant de la recta R seguida d'una translació per un múltiple del vector $\vec{w}$.

Si a l'exemple anterior li sumem un múltiple de $\vec{w} = (1, 1, 1)$, tindrem un moviment helicoïdal

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exemple 5.28 La transformació afí T de l'espai P_3 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

comprovem que es tracta d'un moviment helicoïdal i trobem els elements que el caracteritzen.

Tal com hem fet a l'exemple 5.22, trobem que la transformació lineal associada

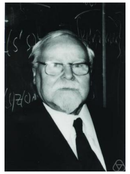
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

és una rotació definida pel quaternió unitari

$$q = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0),$$

per tant es tracta de la rotació de 109.471° al voltant del vector $\vec{w} = (1,1,0)$.

Aleshores, T és la rotació al voltant d'una recta o un moviment helicoïdal. En tots dos casos, fem una rotació al voltant d'una recta amb vector director $\vec{w} = (1,1,0)$; en el cas de la rotació, els punts d'aquesta recta compleixen $T(x,y,z) = (x,y,z)$ i, en el cas del moviment helicoïdal, $T(x,y,z) = (x,y,z) + \lambda(1,1,0)$.


Andrey Nikolayevich Tikhonov

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Resolem, doncs, el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

triangulant la matriu corresponent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 3\lambda - 6 \\ 2 & -2 & -2 & 3\lambda - 6 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_2 \sim F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 3\lambda - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6\lambda - 12 \\ 0 & 0 & -6 & -3\lambda \end{array}\right).$$

Aquest sistema és compatible només si, $6\lambda - 12 = 0$, és a dir, $\lambda = 2$ i la solució és

$$\left.\begin{aligned} -2x + 2y + 2z &= 0 \\ -6z &= -6 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x &= 1 + y \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, T és el *moviment helicoïdal de* $109.471°$ *al voltant del la recta que passa pel punt* $p_0 = (1, 0, 1)$ *i té vector director* $\vec{w} = (1, 1, 0)$ *i translació donada pel vector* $\vec{u} = (2, 2, 0)$.


Joseph Liouville

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

6 Diagonalització

Considerem el sistema d'equacions diferencials

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) \end{aligned}\right\}, \tag{6.1}$$

és a dir, hem de trobar dues funcions $x(t)$ i $y(t)$ tals que les seves derivades compleixin les igualtats 6.1. El més habitual és representar aquestes equacions en forma matricial per

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per resoldre aquestes equacions diferencials, fem el canvi de variables, en aquest cas, d'incògnites, definit per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{d'on,} \qquad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Aleshores, l'equació 6.1 es transforma en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

és a dir, les funcions $u(t)$ i $v(t)$ han de complir les equacions

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= -u(t) \\ v'(t) &= 3v(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{o bé,} \qquad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

que són molt més senzilles.


Erwin Schrödinger

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

És immediat comprovar que les funcions de la forma

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= Ae^{-t} \\ v(t) &= Be^{3t} \end{aligned}\right\}$$

són solució d'aquestes equacions. D'on resulta que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-t} \\ Be^{3t} \end{pmatrix},$$

és a dir, totes les funcions de la forma

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{Ae^{-t} + Be^{3t}}{2} \\ y(t) &= \frac{-Ae^{-t} + Be^{3t}}{2} \end{aligned}\right\}$$

són solució del sistema 6.1.

Observació 6.1 D'aquest exemple ens hem de quedar amb el fet següent, el canvi

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ens ha permès *transformar les equacions inicials* en unes de *molt més senzilles* i amb la pregunta: ***d'on ha sortit aquest canvi?***

Observem que la resposta no és molt difícil. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

necessitem una matriu Q tal que

$$A' = QAQ^{-1} \qquad \text{o bé,} \qquad A' = C^{-1}AC$$

sigui una *matriu diagonal*, on $Q^{-1} = C$.

Una altra qüestió és ***com podem trobar aquesta matriu?***

Observem, també, que hem obtingut la *fórmula del canvi de base per a transformacions lineals* en un context completament diferent.


Shen Kuo

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Aquest és el problema central de la diagonalització: donada una matriu A, trobar una matriu invertible C tal que

$$A' = C^{-1}AC$$

sigui una matriu diagonal. Com que aquesta és la fórmula del canvi de base per a transformacions lineals, el podem enunciar de dues maneres.

Definició 6.2 (a) Direm que una *matriu quadrada A és diagonalitzable* si existeix una matriu invertible C tal que

$$A' = C^{-1}AC$$

sigui diagonal.
(b) Direm que una *transformació lineal T de V_2 o V_3 és diagonalitzable* si existeix una base de $\mathcal{B}'$ de V_2 o V_3 tal que la matriu de T en la base $\mathcal{B}'$ sigui diagonal.

Per veure com es resol el problema, tornem a considerar la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(o la transformació lineal de V_2 que en la base canònica té matriu A) i, plantegem-lo pas a pas.

Hem de trobar una matriu

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

o una base $\mathcal{B}' = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

que també es pot escriure com a

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$


Gilles Personne de Roberval

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Yves Meyer

Si igualem terme a terme, obtenim dos sistemes d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2y_1 &= \alpha x_1 \\ 2x_1 + y_1 &= \alpha y_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} x_2 + 2y_2 &= \beta x_2 \\ 2x_2 + y_2 &= \beta y_2 \end{aligned}\right\}. \tag{6.3}$$

Observació 6.3 En aquest punt, és important notar que tant x_1, y_1 i α, d'una banda, com x_2, y_2 i β, de l'altra, són solució del sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= \lambda x \\ 2x + y &= \lambda y \end{aligned}\right\},$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

que és el sistema d'equacions bàsic de la diagonalització.

Observem, també, que aquest sistema d'equacions és homogeni i, si és compatible determinat, la seva solució serà $x = 0$ i $y = 0$. Però, aquests valors no ens serveixen com a x_1, y_1 o x_2, y_2, ja que la matriu C ha de ser invertible.

Per tant, les solucions del sistema 6.4 que ens interessen són les que s'obtenen quan és *compatible indeterminat*, és a dir, té solucions no nul·les. Ara bé, com que, aquest sistema es pot escriure

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x + 2y &= 0 \\ 2x + (1-\lambda)y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o bé,} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

serà compatible indeterminat si

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0\,.$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Lorenzo Mascheroni

Recordem que λ ens dona els valors de α i β, per tant, tenim que $\alpha = 3$ i $\beta = -1$ (també haguéssim pogut escollir $\alpha = -1$ i $\beta = 3$, és a dir, hi ha múltiples opcions). Un cop trobats α i β, hem de determinar (x_1, y_1) i (x_2, y_2), però de 6.3, tenim que són solució dels sistemes d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2y_1 &= 3x_1 \\ 2x_1 + y_1 &= 3y_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 + 2y_2 &= -x_2 \\ 2x_2 + y_2 &= -y_2 \end{aligned}\right\}.$$

Per resoldre el primer sistema d'equacions, triangulem la seva matriu:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i la solució del sistema és $x_1 = y_1$. Aleshores, escollim $x_1 = 1$ i $y_1 = 1$.
Repetim el procés per resoldre el segon sistema d'equacions:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i la solució del sistema és $x_2 = -y_2$. Aleshores, escollim $x_2 = -1$ i $y_2 = 1$.

Per tant, podem donar el resultat de dues maneres diferents:

- La matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
és diagonalitzable i la matriu
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
compleix que
$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
és diagonal.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

- La transformació lineal T de V_2 que en la base canònica ve definida per la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
diagonalitza en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,1)\}$, és a dir, la matriu de T en la base $\mathcal{B}'$ és
$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observació 6.4 El procediment que hem descrit anteriorment és completament vàlid per a qualsevol matriu quadrada, tot i que en aquest tema ens restringirem a matrius d'ordres 2 i 3, o qualsevol transformació lineal de V_2 o V_3.
Considerem, doncs, una transformació lineal de V_2 o V_3 i sigui A la seva matriu en la base canònica. O considerem directament una matriu quadrada A d'ordre 2 o 3:
$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{o bé,} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

Per diagonalitzar-les, haurem de trobar solucions amb (x, y, z) no nul del sistemes d'equacions
$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (6.5)$$

Definició 6.5 El polinomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, és a dir,
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} \qquad \text{o bé,} \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 - \lambda \end{vmatrix}$$
s'anomena **polinomi característic** de la matriu A i de la transformació lineal T.


Leopold Kronecker

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Richard Courant

Les arrels del polinomi característic s'anomenen **valors propis** de la matriu A (i de la transformació lineal T). Són els únics valors de λ per als quals els sistemes d'equacions 6.5 són compatibles indeterminats, és a dir, tenen solucions no nul·les.

Per a cada valor propi λ, les solucions no nul·les de 6.5 s'anomenen **vectors propis** amb valor propi λ i al conjunt de totes les solucions l'anomenarem **subespai propi** amb valor propi λ i el representarem per S_λ.

Exemple 6.6 La matriu de la transformació lineal de V_3 en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Càlcul d'una base de V_3 formada per vectors propis i de la matriu diagonal corresponent.

En primer lloc, hem de calcular el polinomi característic d'aquesta matriu:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 6 \\ -1 & 3-\lambda & -6 \\ -1 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda)(-7-\lambda) - 24 - 24 + 6(3-\lambda) - 24\lambda - 4(-7-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 21\lambda - 48 + 18 - 6\lambda - 24\lambda + 28 + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2\,. \end{aligned}$$

Els valors propis d'aquesta transformació lineal són les arrels del polinomi característic. La primera, hem de buscar-la pel mètode de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & -4 & -5 & -2 \\ -1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

Les altres dues arrels s'obtenen en resoldre l'equació $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ (hem canviat els signes):

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observem que només hi ha dos valors de λ per als quals el sistema d'equacions 6.5 és compatible indeterminat, $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$ i que el primer ens ha sortit repetit. Aleshores, direm que $\lambda_1 = -1$ té multiplicitat 2.

Per trobar els vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = -1$, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & -6 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on hem passat els termes de la dreta de la igualtat a l'esquerra.

Per resoldre aquest sistema d'equacions, triangulem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solució és el pla vectorial d'equació $x - 4y + 6z = 0$ i, és evident que els vectors $\{(4,1,0), (-6,0,1)\}$ formen una base del pla S_{-1}.

Per trobar els vectors propis amb valor propi $\lambda_2 = -2$, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per resoldre aquest sistema d'equacions, triangulem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 3F_3 - 2F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$


James Gregory

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Les solucions d'aquest sistema formen una recta vectorial de la que podem trobar una base fàcilment:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y+6z&=0\\ 6y-6z&=0\end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{aligned} x&=-z\\ y&=z\end{aligned}\right\},$$

i $\{(-1,1,1)\}$ és una base de la recta vectorial S_{-2}.

És immediat que

$$\mathcal{B}'=\{(4,1,0),(-6,0,1),(-1,1,1)\}$$

és una base de V_3 i que

$$A'=\begin{pmatrix}4&-6&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-4&6\\-1&3&-6\\-1&4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Dit d'una altra manera, donada la transformació lineal de V_3 donada per

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&6\\-1&3&-6\\-1&4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

hem trobat un canvi de base de manera que si fem

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\\w'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

la igualtat 6.6 es transforma en

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\\w'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$


Erwin Schrödinger

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 6.7 *Sigui T una transformació lineal de V_2 o de V_3, aleshores*

(a) *λ és un valor propi de T si, i només si, existeix algun vector no nul $\vec{u}$ tal que*
$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\,.$$
(b) *Si $\vec{u}$ és un vector propi amb valor propi λ, es compleix que*
$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\,.$$

Diagonalització en dimensió 2

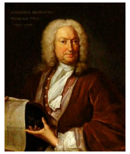
Sigui A una matriu quadrada d'ordre 2 amb coeficients reals, que podem suposar és la matriu d'una transformació lineal T de V_2. Les opcions que apareixen quan la volem diagonalitzar són les següents:

(a) Si *té dos valors propis reals i diferents λ_1 i λ_2*, tindrem dues rectes diferents de vectors propis i és diagonalitzable.

(b) Si *té un valor propi λ_1 amb multiplicitat 2*, només és diagonalitzable si la matriu A és un múltiple de la identitat i, en aquest cas, la base canònica és una base de vectors propis.

(c) Si *té dos valors propis complexos conjugats*, la transformació lineal T no és diagonalitzable. Des del punt de vista de la matriu A, podríem trobar una matriu invertible C amb coeficients complexos tal que $A' = C^{-1}AC$ és diagonal amb els valors propis a la diagonal.

Observació 6.8 Els girs d'angle α amb $\alpha \neq 0, \pi$, és a dir, $\sin\alpha \neq 0$, *no són diagonalitzables*.
Sabem que la matriu del gir en la base canònica és
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
per tant, el seu polinomi característic és
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1$$



Johann Bernoulli

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Sergei Petrovich Novikov

i les seves arrels

$$\lambda = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4\sin^2\alpha}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm 2i\sin\alpha}{2} = \begin{cases} \cos\alpha + i\sin\alpha \\ \cos\alpha - i\sin\alpha \end{cases}$$

per tant, no és diagonalitzable.

Diagonalització en dimensió 3

Sigui A una matriu quadrada d'ordre 3 amb coeficients reals, que podem suposar és la matriu d'una transformació lineal T de V_3. Les opcions que apareixen quan la volem diagonalitzar són les següents:

(a) Si *té tres valors propis reals i diferents λ_1, λ_2 i λ_3*, tindrem tres rectes diferents de vectors propis amb els generadors de les tres rectes linealment independents i és diagonalitzable.

(b) Si *té un valor propi real λ_1 amb multiplicitat 2 i un valor propi $\lambda_2 \neq \lambda_1$*, tindrem una recta vectorial amb valor propi λ_2 generada pel vector $\vec{v}$ i dues possibilitats:

- Si el subespai propi amb valor propi λ_1 és un pla vectorial amb base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, aleshores $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}\}$ és una base de vectors propis i la matriu A és diagonalitzable.
- Si el subespai propi amb valor propi λ_1 és una recta vectorial, la matriu A no és diagonalitzable.

(c) Si *té un valor propi real λ_1 amb multiplicitat 3*, només és diagonalitzable si la matriu A és un múltiple de la identitat i, en aquest cas, la base canònica és una base de vectors propis.

(d) Si *té un valor propi real i dos valors propis complexos conjugats*, la transformació lineal T no és diagonalitzable. Des del punt de vista de la matriu A, podríem trobar una matriu invertible C amb coeficients complexos tal que $A' = C^{-1}AC$ és diagonal amb els valors propis a la diagonal.

Exemple 6.9 Estudiem si la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -4 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - 12 - 8 + 8(3-\lambda) + 4(1+\lambda) + 3(4-\lambda) \\
&= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) - 20 + 40 - 7\lambda = -\lambda^2 + 7\lambda - 12 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda + 20 - 7\lambda \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8\,.
\end{aligned}
$$

Trobem la primera arrel d'aquest polinomi pel mètode de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 6 & -12 & 8 \\
2 & & -2 & 8 & -8 \\
\hline
 & -1 & 4 & -4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Les altres dues arrels s'obtenen en resoldre l'equació $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$:

$$
\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} ,
$$

per tant, aquesta matriu té el valor propi $\lambda_1 = 2$ amb multiplicitat 3. Com que A no és un múltiple de la identitat, no és diagonalitzable.

Proposició 6.10 *Si A i A' estan relacionades per la fórmula del canvi de base, és a dir, $A' = C^{-1}AC$, es compleix que*

$$\det(A - \lambda I) = \det(A' - \lambda I)\,.$$


David Bryant Mumford

Observació 6.11 Les rotacions d'angle α amb $\alpha \neq 0, \pi$ de V_3 *no són diagonalitzables*.
Les matrius en la base canònica de les rotacions són molt diverses, però sabem que sempre existeix una base ortonormal positiva

$$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

en la que la matriu de la rotació és

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

La proposició anterior ens diu que podem calcular el polinomi característic de la rotació a partir de la matriu A' i és immediat que

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1)$$

i el seus valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ i $\lambda_3 = \cos\alpha - i\sin\alpha$. Com que tenim dos valors propis complexos conjugats, les rotacions no són diagonalitzables.

Diagonalització de matrius simètriques

En diferents aplicacions de la diagonalització a la mecànica, l'estadística, la geometria el que ens interessa és diagonalitzar *matrius simètriques*. En mecànica, el *tensor d'inèrcia*, en estadística, la *matriu de covariància* i en geometria, les *matrius de les parts quadràtiques de còniques i quàdriques*, són matrius simètriques i, els seus valors i vectors propis tenen un especial significat.

Definició 6.12 Una transformació lineal de V_2 o V_3 és **simètrica** si la seva matriu en la base canònica és simètrica.

Si una transformació lineal T de V_2 o V_3 és simètrica, per a qualsevol parella de vectors $\vec{u}, \vec{v} \in V$, es compleix que

$$\vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}\,.$$

N'hi ha prou que observem que, en el cas de V_2, si $\vec{u} = (x_1, y_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2)$, aleshores

$$\vec{u} \cdot T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad T(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} A^t \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ja que A és simètrica.


Augustus de Morgan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Ludwig Wittgenstein

Proposició 6.13 *Vectors propis d'una matriu o d'una transformació lineal simètrica corresponents a valors propis diferents són perpendiculars.*

Sigui T una transformació lineal simètrica de V_2 o V_3 i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vectors propis de T amb valors propis λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Aleshores,

$$\lambda_1(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda_1\vec{u})\cdot\vec{v} = T(\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot T(\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda_2\vec{v}) = \lambda_2(\vec{u}\cdot\vec{v}),$$

és a dir,

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0.$$

Com que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, haurà de ser $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars.

Teorema 6.14 Teorema espectral

(a) *Tota transformació lineal simètrica de V_2 o de V_3 té bases ortonormals de vectors propis.*

(b) *Donada qualsevol matriu simètrica amb coeficients reals, sempre és possible trobar una matriu ortogonal C tal que*

$$A' = C^{-1}AC = C^tAC$$

és diagonal.

Exemple 6.15 Diagonalitzem ortogonalment la matriu

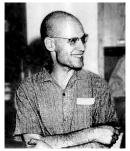
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El seu polinomi característic és

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(2-\lambda)$$

$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 6 + 3\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Alexandre Grothendieck

Trobem la primera arrel d'aquest polinomi pel mètode de Ruffini:

$$\begin{array}{c|rrrr} & -1 & 6 & -9 & 4 \\ 1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & -1 & 5 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

Les altres dues arrels s'obtenen en resoldre l'equació $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} ,$$

per tant, aquesta matriu té els valors propis $\lambda_1 = 1$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = 4$.

Per calcular els vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 1$, hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És evident que els vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 1$ formen el pla vectorial d'equació $x + y + z = 0$ i que $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ és una base d'aquest pla.

D'altra banda, per trobar vectors propis amb valor propi $\lambda_2 = 4$, hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i ho fem triangulant la matriu corresponent:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 + F1 \\ F_3 \sim 2F_3 + F1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

La solució ve donada per

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z&=0\\ -3y+3z&=0 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} -2x+z+z&=0\\ y&=z \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x&=z\\ y&=z \end{aligned}\right\}$$

i el vector $(1,1,1)$ és un generador de la recta de vectors propis amb valor propi $\lambda_2=4$.
La base $\mathcal{B}=\{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ és una base de vectors propis de la matriu A i compleix que el vectors $(1,0,-1)$ i $(0,1,-1)$, que tenen valor propi $\lambda_1=1$ *són perpendiculars* al vector $(1,1,1)$, que té valor propi $\lambda_2=4$.

Per trobar una base ortonormal de vectors propis hem d'aplicar el mètode de Gram-Schmidt als vectors $(1,0,-1)$ i $(0,1,-1)$ per tal d'obtenir-ne dos de perpendiculars:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1,0,-1)\\ \vec{v}_2 &= (0,1,-1)-\frac{(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}(1,0,-1)=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)\\ &= \frac{1}{2}(-1,2,-1)\simeq(1,-2,1)\,. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\mathcal{B}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

és una *base ortonormal de vectors propis de A*.

La matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

és a dir, hem trobat una matriu ortogonal C tal que

$$A'=C^{-1}AC=C^tAC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

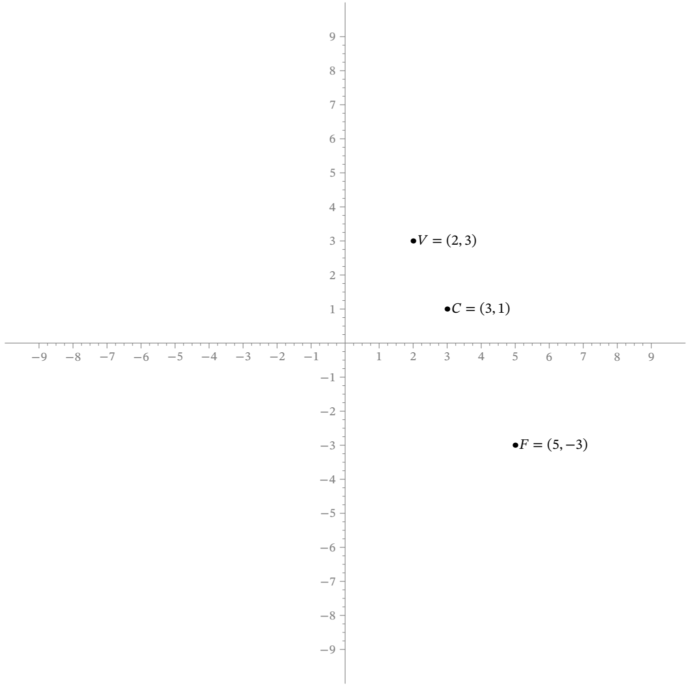

Zu Chongzhi

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

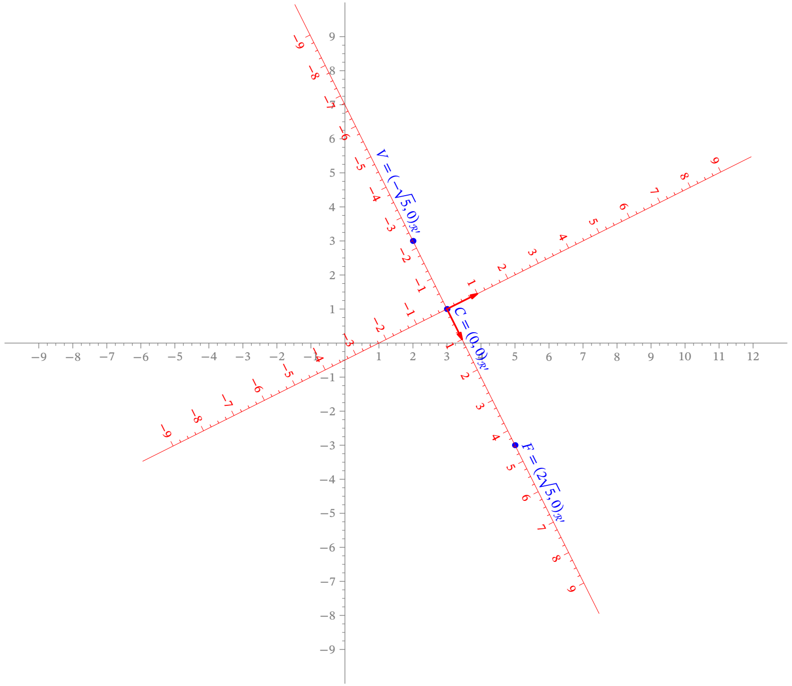
7 Còniques i quàdriques

Comencem aquest capítol amb uns quants exemples d'utilització dels canvis de coordenades en les còniques, però des d'un punt de vista diferent al que havíem vist al capítol 4.

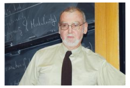
Exemple 7.1 Anem a estudiar la *hipèrbola* que té el centre en el punt $C = (3, 1)$, un focus en el punt $F = (5, -3)$ i el vèrtex a $V = (2, 3)$. Si representem gràficament aquests tres punts, sembla que no tenim gaire dades sobre la hipèrbola. Recordem, però que l'*eix principal* d'una hipèrbola és la recta que passa pels focus i el centre i que l'*eix secundari* és la recta perpendicular a l'eix principal que passa pel centre. Representem, doncs, aquestes dues rectes i, a més, prenem-les com a eixos de la referència $\mathcal{R}'$.



Centre, focus i vèrtex



Eixos principal i secundari



Robert Phelan Langlands

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

L'*eix principal* de la hipèrbola passa pel centre i té vector director $\overrightarrow{CF} = F - C = (5,-3) - (3,1) = (2,-4) \simeq (1,-2)$, mentre que el vector director de l'*eix secundari* ha de ser perpendicular a $\overrightarrow{CF}$ i, per tant, serà $(2,1)$. Aleshores, la *referència principal* de la hipèrbola és

$$\mathcal{R}' = \left\{(3,1)\,;\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\right\}.$$

És evident que les coordenades de C en la referència $\mathcal{R}'$ són $C = (0,0)_{\mathcal{R}'}$, ja que C és l'origen d'aquesta referència i, tenint en compte que,

$$d(C,F) = ||\overrightarrow{CF}|| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$d(C,V) = ||\overrightarrow{CV}|| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,,$$

resulta que $F = (2\sqrt{5},0)_{\mathcal{R}'}$ i $V = (-\sqrt{5},0)_{\mathcal{R}'}$.

D'altra banda, la *semidistància focal*, el *semieix real* i el *semieix imaginari* de la hipèrbola són

$$c = d(C,F) = 2\sqrt{5}$$
$$a = d(C,V) = \sqrt{5}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20-5} = \sqrt{15}\,,$$

és a dir, l'equació de la hipèrbola en la referència principal o *equació reduïda* és

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o bé,} \qquad \frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{15} = 1\,.$$

Evidentment, l'altre focus de la hipèrbola és el punt $F' = (-2\sqrt{5},0)_{\mathcal{R}'}$ i l'altre vèrtex és el punt $V' = (\sqrt{5},0)_{\mathcal{R}'}$. Les equacions de les *asímptotes* de la hipèrbola en la referència $\mathcal{R}'$ són

$$bx' \pm ay' = 0\,, \qquad \text{és a dir,} \qquad \sqrt{15}\,x' \pm \sqrt{5}y' = 0\,,$$

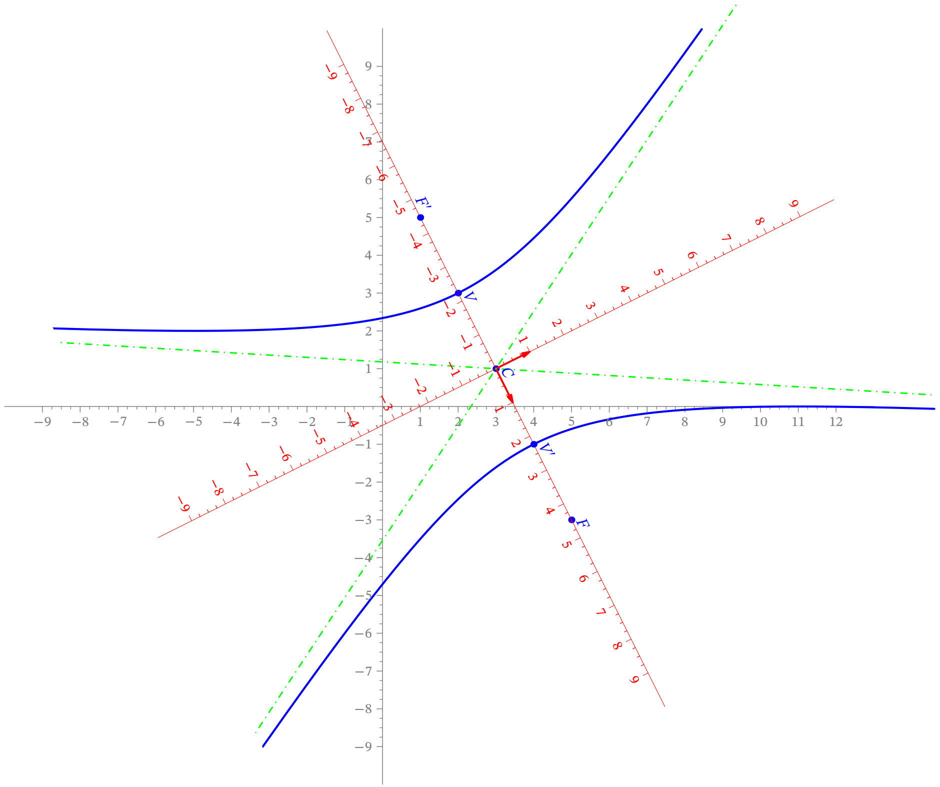
que, simplificades, es converteixen en

$$\sqrt{3}\,x' + y' = 0 \qquad \text{i} \qquad \sqrt{3}\,x' - y' = 0\,.$$


Gabriel Lamé

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Ara ja podem representar gràficament les asímptotes i, finalment, la hipèrbola




Lazare Nicolas Carnot

Per acabar, calcularem l'equació de la hipèrbola i de les seves asímptotes en la referència canònica. Per això, hem de començar amb les equacions del canvi de coordenades

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Ludwig Wittgenstein

Però necessitem tenir (x', y') en funció de (x, y), aleshores,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{-1 + x - 2y}{\sqrt{5}} \\ y' &= \frac{-7 + 2x + y}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}.$$

Tenint en compte que l'equació de la hipèrbola es pot escriure $3x'^2 - y'^2 = 15$, resulta que la seva equació en la referència canònica és

$$3\left(\frac{-1 + x - 2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{-7 + 2x + y}{\sqrt{5}}\right)^2 = 15$$

$$\frac{3(1 + x^2 + 4y^2 - 2x + 4y - 4xy)}{5} - \frac{49 + 4x^2 + y^2 - 28x - 14y + 4xy}{5} = 15$$

$$3 + 3x^2 + 12y^2 - 6x + 12y - 12xy - (49 + 4x^2 + y^2 - 28x - 14y + 4xy) = 75$$

$$-x^2 - 16xy + 11y^2 + 22x + 26y - 121 = 0\,.$$

Finalment, les asímptotes són les rectes que passen pel centre $C = (3, 1)$ i tenen vectors directors

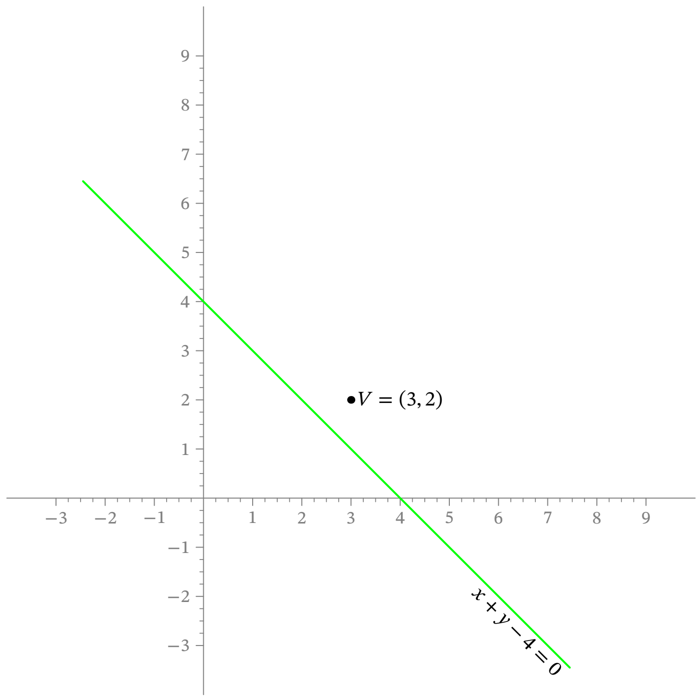
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (a, b)_{\mathcal{B}'} = \left(\sqrt{5}, \sqrt{15}\right)_{\mathcal{B}'} \simeq \left(1, \sqrt{3}\right)_{\mathcal{B}'} \simeq (1, -2) + \sqrt{3}\,(2, 1) = \left(1 + 2\sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right) \\ \vec{v}_2 &= (a, -b)_{\mathcal{B}'} = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{15}\right)_{\mathcal{B}'} \simeq \left(1, -\sqrt{3}\right)_{\mathcal{B}'} \simeq (1, -2) - \sqrt{3}\,(2, 1) = \left(1 - 2\sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

és a dir, les equacions contínues de les asímptotes de la hipèrbola són

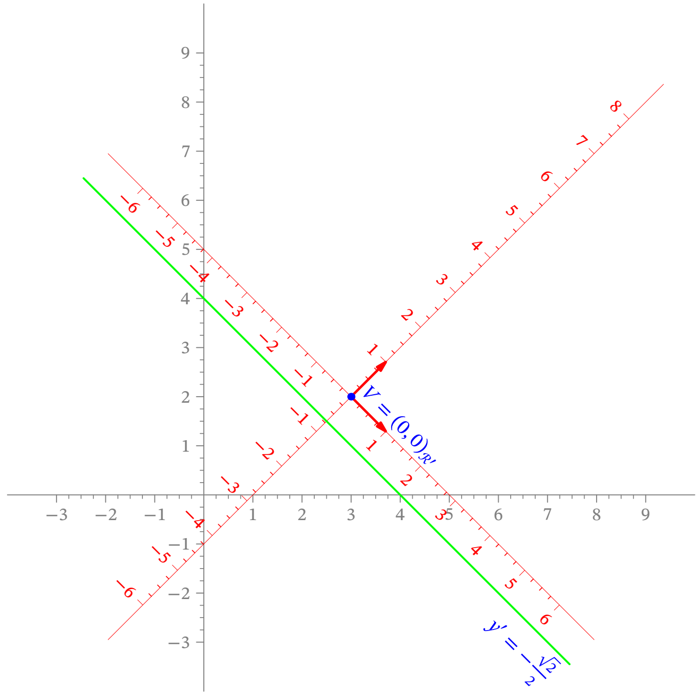
$$\frac{x - 3}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{y - 1}{-2 + \sqrt{3}} \qquad \text{i} \qquad \frac{x - 3}{1 - 2\sqrt{3}} = \frac{y - 1}{-2 - \sqrt{3}}\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 7.2 El *vèrtex* d'una paràbola és el punt $V = (3, 2)$ i la seva *recta directriu* té equació $x + y - 4 = 0$. Calculem la seva referència principal, el seu focus, la seva equació reduïda, la seva equació en la referència canònica i representem-la gràficament.
Com a l'exemple anterior, les dades només són el *vèrtex* i la recta *directriu*. Sabem, però, que l'*eix principal* d'una paràbola és la recta que passa pel vèrtex i és paral·lela a la recta directriu, mentre que l'*eix secundari* és la recta perpendicular a l'eix principal que passa pel vèrtex. Representem, doncs, aquestes dues rectes i, a més, prenem-les com a eixos de la referència $\mathcal{R}'$.

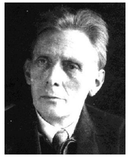


Vèrtex i recta directriu



Eixos principal i secundari

L'*eix principal* de la paràbola passa pel vèrtex i és paral·lel a la recta directriu $x + y - 4 = 0$, per tant, té vector director $\vec{v}_1 = (1, -1)$, mentre que el vector director de l'*eix secundari* ha de ser perpendicular a $\vec{v}_1 = (1, -1)$ i, per tant, serà $\vec{v}_2 = (1, 1)$.



Aleksandr Yakovlevich Khinchin

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observem que l'equació de la recta directriu en la referència $\mathcal{R}'$ passa a ser $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ja que la distància del vèrtex a aquesta recta és

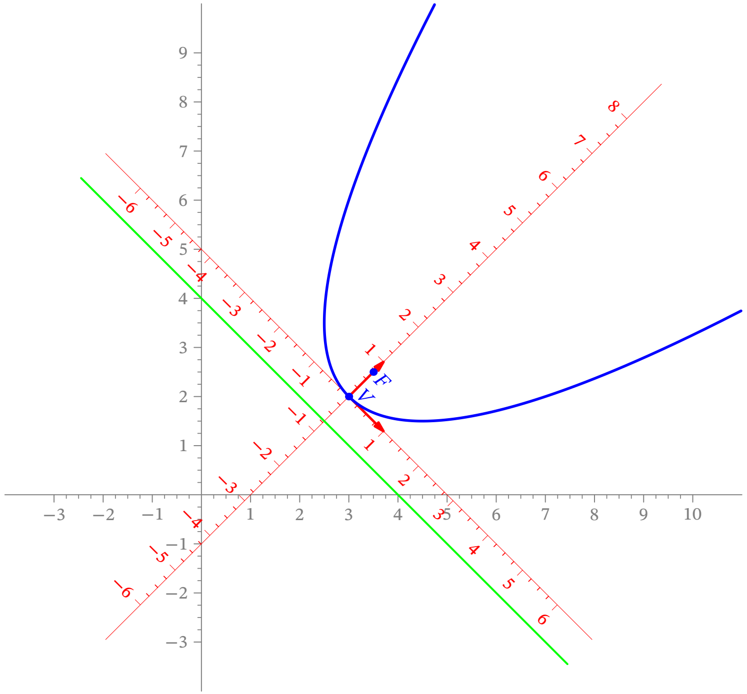
$$d(V,R) = \frac{|3+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

i que la *referència principal* de la paràbola és

$$\mathcal{R}' = \left\{(3,2)\,;\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}.$$

A més, el *paràmetre* de la paràbola és el doble de la distància entre el vèrtex i la recta directriu $p = 2d(V,R) = \sqrt{2}$ i l'equació de la paràbola en la referència principal o *equació reduïda* és

$$y' = \frac{x'^2}{2\sqrt{2}}$$




Gregorius Saint-Vincent

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per acabar, calcularem l'equació de la paràbola i les coordenades del focus en la referència canònica. Per això, hem de començar amb les equacions del canvi de coordenades

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Aleshores, aïllem (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{-1 + x - y}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{-5 + x + y}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\}.$$

Tenint en compte que l'equació de la paràbola es pot escriure $2\sqrt{2}\, y' = x'^2$, resulta que la seva equació en la referència canònica és

$$\frac{2\sqrt{2}(-5 + x + y)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1 + x - y}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$-10 + 2x + 2y = \frac{1 + x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2xy}{2}$$

$$-20 + 4x + 4y = 1 + x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2xy$$

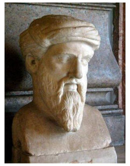
$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 21 = 0.$$

Les coordenades del focus en la referència principal de la paràbola són $F = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{R}'}$, aleshores, en la referència canònica tindrem que

$$F = (3, 2) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

Gottfried Wilhelm Leibniz

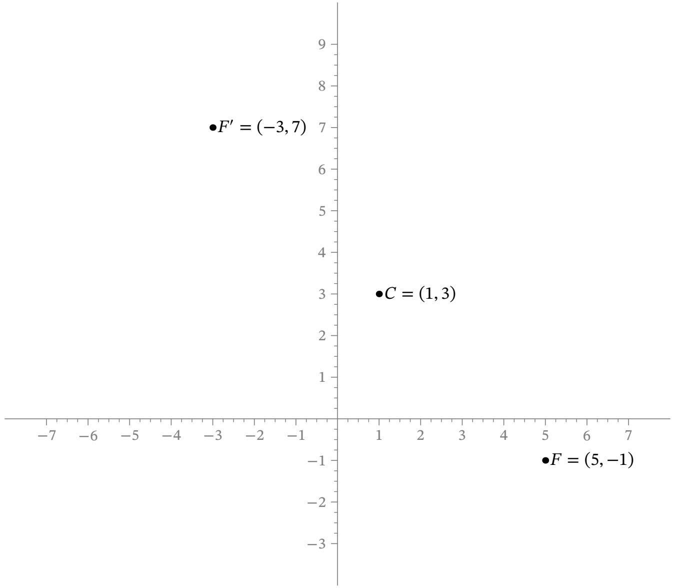
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Pythagoras of Samos

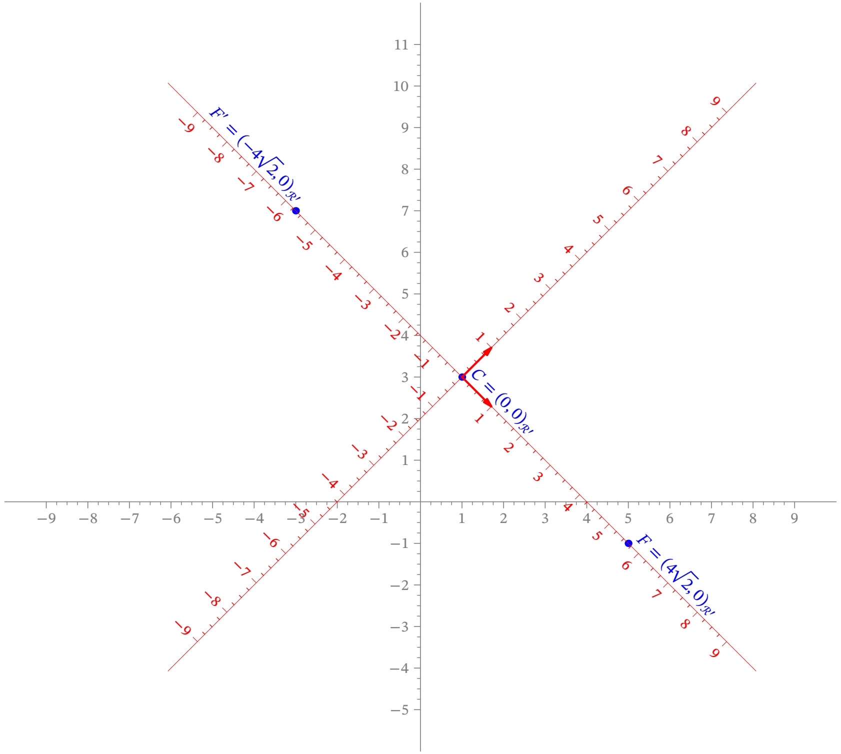
Exemple 7.3 Els focus d'una *el·lipse* són els punt $F = (5, -1)$ i $F' = (-3, 7)$ i el *semieix major* $a = 5\sqrt{2}$. Anem a calcular la seva referència principal, la seva equació reduïda, la seva equació en la referència canònica i representem-la gràficament.
El centre d'una el·lipse és el punt mitjà del segment que uneix els dos focus, és a dir,

$$C = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+7}{2} \right) = (1, 3)\,.$$

A més, l'*eix principal* d'una el·lipse és la recta que passa pels focus i el centre i que l'*eix secundari* és la recta perpendicular a l'eix principal que passa pel centre. Representem, doncs, aquestes dues rectes i, a més, prenem-les com a eixos de la referència $\mathcal{R}'$.



Focus i centre



Eixos principal i secundari

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

L'*eix principal* de l'el·lipse passa pel centre i té vector director $\overrightarrow{CF} = F - C = (5,-1) - (1,3) = (4,-4) \simeq (1,-1)$, mentre que el vector director de l'*eix secundari* ha de ser perpendicular a $\overrightarrow{CF}$ i, per tant, serà $(1,1)$. Aleshores, la *referència principal* de l'el·lipse és

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,3);\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}.$$

És evident que les coordenades de C en la referència $\mathcal{R}'$ són $C = (0,0)_{\mathcal{R}'}$, ja que C és l'origen d'aquesta referència i, tenint en compte que,

$$c = d(C,F) = ||\overrightarrow{CF}|| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

resulta que $F = (4\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$ i que l'altre focus és el punt $F' = (-4\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$.

El *semieix menor* de l'el·lipse ve donat per

$$b^2 = a^2 - c^2 = 50 - 32 = 18 \qquad \text{i} \qquad b = 3\sqrt{2}$$

i l'equació reduïda de l'el·lipse és

$$\frac{x'^2}{50} + \frac{y'^2}{18} = 1\,.$$

Amb aquestes dades, sabem també les coordenades dels quatre vèrtexs en la *referència principal* $\mathcal{R}'$ i en la referència canònica:

$$V_1 = (5\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'} = (1,3) + 5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (6,-2)$$

$$V_2 = (-5\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'} = (1,3) - 5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (-4,8)$$

$$V_3 = (0,3\sqrt{2})_{\mathcal{R}'} = (1,3) + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) + 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (4,6)$$

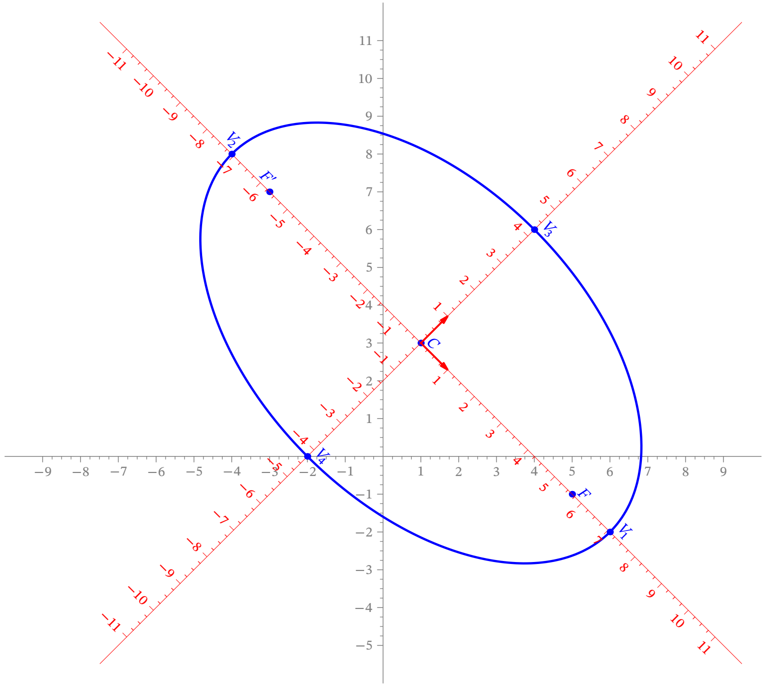
$$V_4 = (0,-3\sqrt{2})_{\mathcal{R}'} = (1,3) + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) - 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (-2,0)$$


Richard Courant

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Hermann Günther Grassmann

Amb totes aquestes dades, ja poden representar gràficament l'el·lipse



Per acabar, calcularem l'equació de l'el·lipse en la referència canònica. Per això, hem de començar amb les equacions del canvi de coordenades

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

Aleshores, aïllem (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

és a dir,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2+x-y}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{-4+x+y}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} .$$

Tenint en compte que l'equació de l'el·lipse es pot escriure, multiplicant els dos costats per 450, $9x'^2 + 25y'^2 = 450$, la seva equació en la referència canònica serà

$$9\left(\frac{2+x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 25\left(\frac{-4+x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 450$$

$$\frac{9(4+x^2+y^2+4x-4y-2xy)}{2} + \frac{25(16+x^2+y^2-8x-8y+2xy)}{2} = 450$$

$$9(4+x^2+y^2+4x-4y-2xy) + 25(16+x^2+y^2-8x-8y+2xy) = 900$$

$$34x^2 + 32xy + 34y^2 - 164x - 236y - 464 = 0$$

Observació 7.4 En els tres exemples anteriors l'equació de la hipèrbola, la paràbola i l'el·lipse és una equació completa de segon grau amb les variables o incògnites. Així com la representació geomètrica d'una equació de primer grau amb dues variables és sempre una recta, amb les equacions de segon grau podem obtenir diferents figures geomètriques, com el·lipses, hipèrboles o paràboles.


Ernst Eduard Kummer

L'objectiu de les següents seccions serà la identificació de la figura geomètrica i dels elements característics dels punts del pla que són solució d'una equació de segon grau, és a dir, del tipus

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 .$$

Els dosos amb els que escrivim aquesta equació sembla que no tenen sentit, però a la secció següent veurem el perquè.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.5 Anomenarem **cònica** a qualsevol *corba* del pla formada per les solucions d'una equació polinòmica de segon grau del tipus

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\,. \tag{7.1}$$

En aquesta secció volem estudiar l'efecte d'un canvi de coordenades

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B + C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

en l'equació d'una cònica. Per això utilitzarem la *forma matricial* de l'equació de les còniques, que ens permetrà utilitzar les eines de l'Àlgebra Lineal per al seu estudi. En particular, podrem trobar els seus eixos, focus i vèrtexs de manera relativament senzilla.
El punt de partida ens el dona la proposició següent.

Proposició 7.6 *L'equació 7.1 de les còniques es pot escriure en* forma matricial *de la forma següent:*

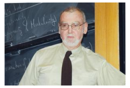
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0\,. \tag{7.2}$$

Només cal observar que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = (ax + by)x + (bx + cy)y = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

i que

$$2 \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2dx + 2ey\,.$$



Robert Phelan Langlands

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

La forma matricial de la cònica $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 21 = 0$ és

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 21 = 0\,.$$

Definició 7.7 La matrius

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad L = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

s'anomenen **matriu de la part quadràtica** i **matriu de la part lineal** de la cònica.

Aleshores, podem escriure les equacions de les còniques en la forma

$$X^tQX + 2L^tX + f = 0 \qquad \text{on} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f \quad \text{és el terme independent.}$$

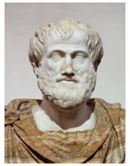
Proposició 7.8 *Si apliquem el canvi de coordenades* $X = B + CX'$ *a la cònica* $X^tQX + 2L^tX + f = 0$*, obtenim*

$$X'^tQ'X' + 2L'^tX' + f' = 0 \qquad \text{on} \qquad Q' = C^tQC\,, \qquad L' = C^t(QB + L) \qquad \text{i} \qquad f' = B^tQB + 2L^tB + f\,.$$

Només cal veure que és el resultat d'una substitució

$$\begin{gathered}
X^tQX + 2L^tX + f = 0 \\
(B + CX')^tQ(B + CX') + 2L^t(B + CX') + f = 0 \\
(B^t + X'^tC^t)(QB + QCX') + 2L^tB + 2L^tCX' + f = 0 \\
B^tQB + B^tQCX' + X'^tC^tQB + X'^tC^tQCX' + 2L^tB + 2L^tCX' + f = 0 \\
X'^tC^tQCX' + 2B^tQCX' + 2L^tCX' + B^tQB + 2L^tB + f = 0 \\
X'^tC^tQCX' + 2(QB + L)^tCX' + B^tQB + 2L^tB + f = 0\,.
\end{gathered}$$

Observem que també podem posar $L'^t = (QB + L)^tC$.


Aristotle of Stagira

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Nikolai Ivanovich Lobachevsky

Exemple 7.9 Fent servir l'anterior resultat, calculem l'equació de la cònica

$$5x^2 - 6xy - 3y^2 - 6x - 6y - 27 = 0$$

en la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}.$$

En aquest cas, tenim que

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad f = -27, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$Q' = C^t Q C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L'^t = (QB + L)^t C = \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^t \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -16 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f' = B^t Q B + 2L^t B + f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 27 = -19 - 18 - 27 = -64$$

Per tant, l'equació de la cònica en la referència $\mathcal{R}'$ és

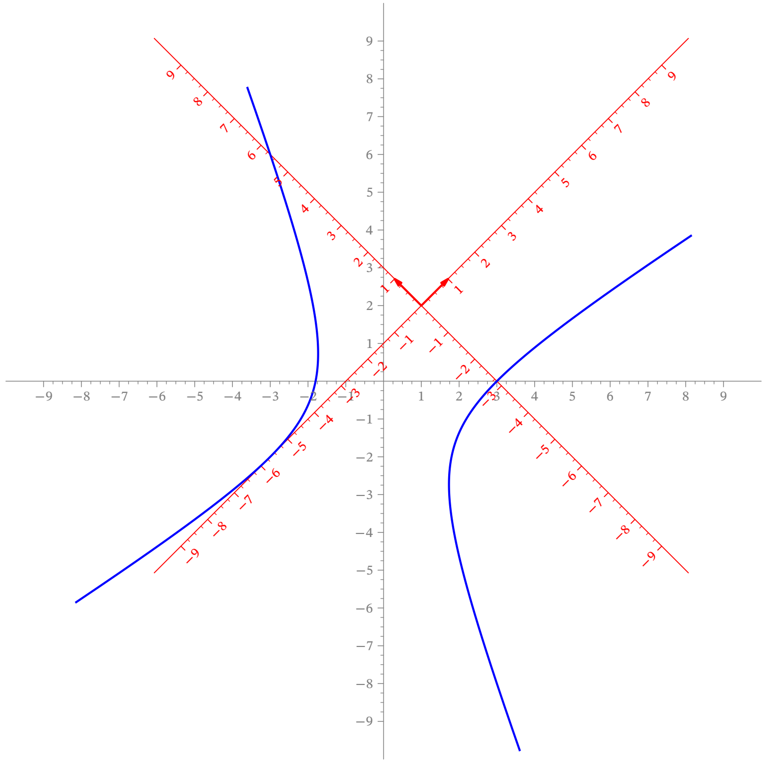
$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 64 = 0.$$

o bé,

$$-2x'^2 - 8x'y' + 4y'^2 - 16\sqrt{2}\,x' - 8\sqrt{2}\,y' - 64 = 0.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

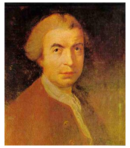
En el gràfic següent podem veure una representació de la cònica i les referències canònica i $\mathcal{R}'$.



Classificació de còniques

En aquesta secció utilitzarem el hem vist sobre còniques i canvis de coordenades per fer-ne un estudi més detallat. El punt clau està en les igualtats

$$
\begin{aligned}
Q' &= C^t Q C \\
L' &= C^t (QB + L) \\
f' &= B^t Q B + 2L^t B + f\,.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$



Roger Joseph Boscovich

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 7.10 Del capítol anterior, sabem que donada una matriu simètrica Q, existeix una matriu ortogonal C tal que $Q' = C^t QC$ és diagonal i, a més,

$$Q' = C^t QC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

on λ_1 i λ_2 són els valors propis de la matriu Q. Dit d'una altra manera, la matriu Q té una *base ortonormal de vectors propis* $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tenim, doncs, un primer resultat important:

Proposició 7.11 *Si el sistema d'equacions $QX + L = 0$ és compatible i escollim la referència $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, on (x_0, y_0) és una solució de $QX + L = 0$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és una base ortonormal de vectors propis de Q, l'equació de la cònica en la referència $\mathcal{R}'$ serà*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' = 0\,, \tag{7.4}$$

on λ_1 i λ_2 són els valors propis de Q i

$$f' = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2L^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + f\,.$$

Les solucions del sistema $QX + L = 0$ són *punts de simetria* de la cònica, motiu pel qual s'anomenen **centre o centres de la cònica** depenent si l'anterior sistema és compatible determinant o indeterminat. La referència $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ obtinguda tal com es descriu a la proposició anterior s'anomena **referència principal** de la cònica.

Si el sistema $QX + L = 0$ és compatible, ja podem distingir uns quants tipus de còniques en funció dels signes de λ_1, λ_2 i f'.

Còniques amb dos valors propis no nuls

Es tracta de còniques amb un únic centre (el sistema d'equacions $QX + L = 0$ (que a partir d'ara escriurem $QX = -L$) és compatible determinat) ja que el determinant de Q és igual al producte dels seus valors propis i, per tant, diferent de zero. L'equació de la cònica en la referència principal és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' = 0\,,$$

que en funció dels signes de λ_1, λ_2 i f' es pot transformar en una de les equacions reduïdes següents:


Edmond Halley

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

El·lipse real

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$$

El·lipse imaginària

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Hipèrbola

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=-1$$

Hipèrbola

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

Rectes secants imaginàries

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$$

Rectes secants reals

Exemple 7.12 Classificació i càlcul dels elements geomètrics de la cònica d'equació

$$5x^2-6xy-3y^2-6x-6y-27=0\,.$$

Les matrius i el terme independent d'aquesta cònica són

$$Q=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&-3\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}\qquad \text{i}\qquad f=-27\,.$$

El polinomi característic de la matriu Q és

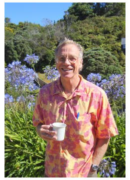
$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda&-3\\-3&-3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-3-\lambda)-9=\lambda^2-2\lambda-24$$

i els valors propis

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\pm 10}{2}=\begin{cases}6\\-4\end{cases}\,.$$

Per trobar els vectors propis, hem de resoldre els sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix}5&-3\\-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad \text{i}\qquad \begin{pmatrix}5&-3\\-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



Michael Hartley Freedman

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per resoldre el primer sistema d’equacions, triangulem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 3F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i veiem que té solució $-x - 3y = 0$, és a dir, la recta de vectors propis amb valor propi 6 està generada pel vector $(3, -1)$. D’altra banda, com que la matriu Q és simètrica, la recta de vectors propis amb valor propi -4 està generada per un vector perpendicular a l’anterior, per exemple $(1, 3)$. A més, com que els dos valors propis són diferents de zero, ja sabem que el sistema d’equacions $QX = -L$ és compatible determinat i anem a resoldre’l

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{array}\right)_{F_2 \sim 3F_2 + 5F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 3 \\ 0 & -24 & 24 \end{array}\right),$$

d’on resulta que el centre és el punt $C = (0, -1)$.

Per determinar l’*equació reduïda* de la cònica, només cal que calculem f'.

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 27 = -3 + 6 - 27 = -24,$$

per tant l’equació reduïda 7.4 de la cònica és

$$6x'^2 - 4y'^2 - 24 = 0,$$

que amb unes poques simplificacions, es transforma en

$$\begin{aligned} 6x'^2 - 4y'^2 &= 24 \\ \frac{6x'^2 - 4y'^2}{24} &= 1 \\ \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{6} &= 1. \end{aligned}$$

Per tant, es tracta d’una *hipèrbola* amb semieix real $a = 2$ i semieix imaginari $b = \sqrt{6}$. La seva *referència principal* és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (0, -1); \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \right\}.$$


Louis Nirenberg

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

La *semidistància focal* de la hipèrbola és $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+6} = \sqrt{10}$, aleshores els focus i els vèrtexs són

$$F = (\sqrt{10}, 0)_{\mathcal{R}'} = (0,-1) + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(3,-1) = (3,-2)$$

$$F' = (-\sqrt{10}, 0)_{\mathcal{R}'} = (0,-1) - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(3,-1) = (-3,0)$$

$$V = (2,0)_{\mathcal{R}'} = (0,-1) + \frac{2}{\sqrt{10}}(3,-1) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(6, -2-\sqrt{10}\right)$$

$$V' = (-2,0)_{\mathcal{R}'} = (0,-1) - \frac{2}{\sqrt{10}}(3,-1) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-6, 2-\sqrt{10}\right).$$

Finalment, les asímptotes de la hipèrbola són les rectes que passen pel centre i tenen vectors directors $(2, \pm\sqrt{6})_{\mathcal{B}'}$ on

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3) \right\}.$$

Aleshores, les components en la base canònica de vectors directors de les asímptotes són (hem multiplicat per $\sqrt{10}$)

$$\vec{v}_1 = 2(3,-1) + \sqrt{6}(1,3) = (6+\sqrt{6}, -2+3\sqrt{6})$$

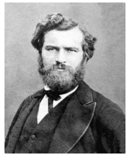
$$\vec{v}_2 = 2(3,-1) - \sqrt{6}(1,3) = (6-\sqrt{6}, -2-3\sqrt{6}).$$

Per tant, les equacions de les asímptotes són

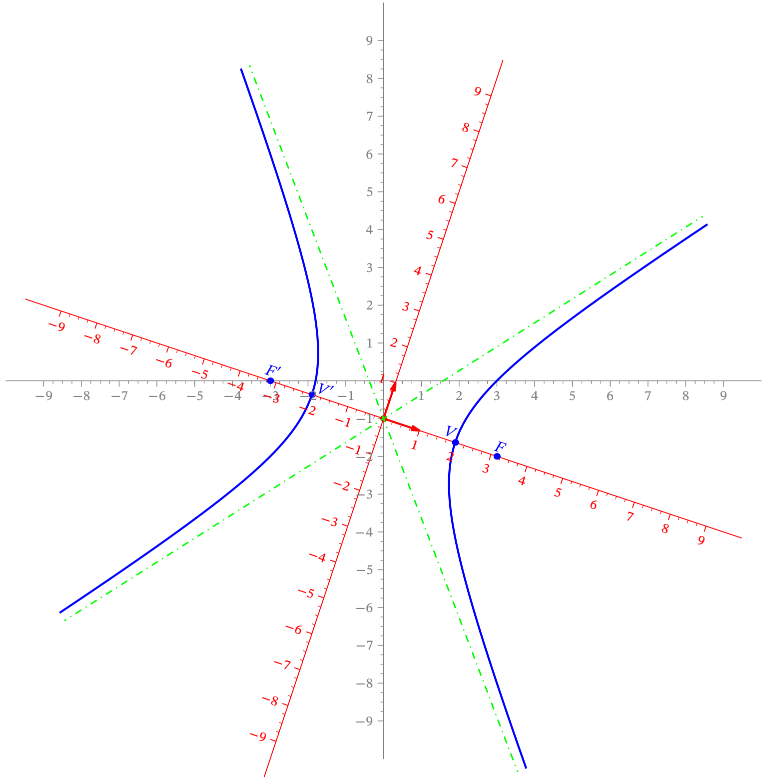
$$\frac{x}{6+\sqrt{6}} = \frac{y+1}{-2+3\sqrt{6}} \qquad \text{o bé,} \qquad (2-3\sqrt{6})x + (6+\sqrt{6})y + 6 + \sqrt{6} = 0$$

i

$$\frac{x}{6-\sqrt{6}} = \frac{y+1}{-2-3\sqrt{6}} \qquad \text{o bé,} \qquad (2+3\sqrt{6})x + (6-\sqrt{6})y + 6 - \sqrt{6} = 0\,.$$


Camille Jordan

El gràfic de la hipèrbola és



Exemple 7.13 Classificació i càlcul dels elements geomètrics de la cònica d'equació

$$34x^2 + 32xy + 34y^2 - 164x - 236y - 464 = 0\,.$$

Les matrius de la part quadràtica i de la part lineal i el terme independent de la cònica són

$$Q = \begin{pmatrix} 34 & 16 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -82 \\ -118 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -464\,.$$


Rudolf Friedrich Alfred Clebsch

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

el polinomi característic de la matriu Q

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}34-\lambda & 16\\ 16 & 34-\lambda\end{vmatrix}=(34-\lambda)^2-256=\lambda^2-68\lambda+1156-256=\lambda^2-68\lambda+900$$

i els seus valors propis

$$\lambda=\frac{68\pm\sqrt{4624-3600}}{2}=\frac{68\pm\sqrt{1024}}{2}=\frac{68\pm 32}{2}=\begin{cases}50\\18\end{cases}.$$

Per trobar els vectors propis, hem de resoldre els sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=50\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\text{i}\quad\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=18\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Per resoldre el primer sistema d'equacions, triangulem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{rr|r}-16 & 16 & 0\\ 16 & -16 & 0\end{array}\right)_{F_2\sim F_2+F_1}\simeq\left(\begin{array}{rr|r}-16 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

i veiem que solució és $-x+y=0$, és a dir, la recta de vectors propis amb valor propi 50 és la generada pel vector $(1,1)$ i, per tant, la recta de vectors propis amb valor propi 18 és la generada per un vector perpendicular a l'anterior, per exemple $(-1,1)$. A més, com que els dos valors propis són diferents de zero, ja sabem que el sistema d'equacions $QX=-L$ és compatible determinat i anem a resoldre'l

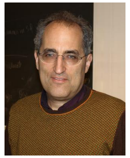
$$\left(\begin{array}{rr|r}34 & 16 & 82\\ 16 & 34 & 118\end{array}\right)_{F_2\sim 17F_2-8F_1}\simeq\left(\begin{array}{rr|r}34 & 16 & 82\\ 0 & 450 & 1350\end{array}\right),$$

d'on resulta que el centre és el punt $C=(1,3)$.
El terme independent de l'equació reduïda és

$$f'=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}34 & 16\\ 16 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-82 & -118\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-464=436-872-464=-900,$$

per tant, l'*equació reduïda* és

$$50x'^2+18y'^2-900=0\qquad\text{o bé,}\qquad\frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{50}=1.$$


Edward Witten

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observem que el primer denominador és més petit que el segon, és a dir, l'equació és del tipus

$$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

i es tracta d'una *el·lipse* amb semieix major $a=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ i semieix menor $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Aleshores, els focus estaran sobre l'eix de les y' i la semidistància focal és $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

La *referència principal* de l'el·lipse és

$$\mathcal{R}'=\left\{(1,3)\,;\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\},$$

les coordenades dels focus

$$F=(0,4\sqrt{2})_{\mathcal{R}'}=(1,3)+4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)=(-3,7)$$

$$F'=(0,-4\sqrt{2})_{\mathcal{R}'}=(1,3)-4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)=(5,-1)$$

i els vèrtexs

$$V_1=(0,5\sqrt{2})_{\mathcal{R}'}=(1,3)+5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)=(-4,8)$$

$$V_2=(0,-5\sqrt{2})_{\mathcal{R}'}=(1,3)-5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)=(6,-2)$$

$$V_3=(3\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}=(1,3)+3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=(4,6)$$

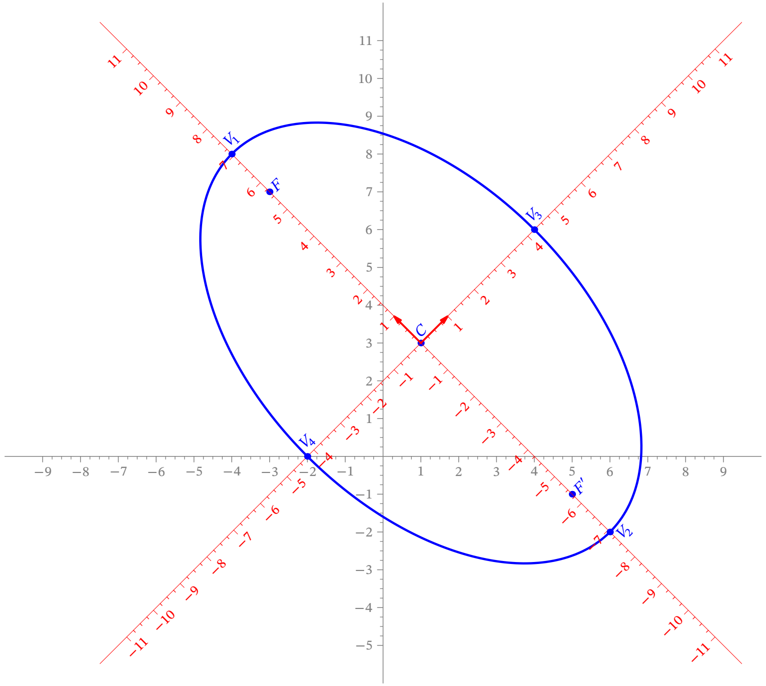
$$V_4=(-3\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}=(1,3)-3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=(-2,0)$$


John von Neumann

Observació 7.14 En l'exemple 7.3 hem obtingut l'equació reduïda de l'el·lipse a partir del focus i el semieix major, mentre que en aquest exemple hem fet el procés invers, hem trobat tots els elements geomètrics de l'el·lipse a partir de l'equació.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observem, també, que el resultat ens ha sortit equivalent al de l'exemple 7.3, però no exactament igual. El gràfic de l'el·lipse és



Còniques amb centre i un valor propi nul ($\lambda_2 = 0$)

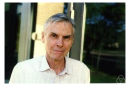
Es tracta de còniques amb *infinits centres* (el sistema $QX = -L$ és compatible indeterminat) i la seva equació en la referència principal és

$$\lambda_1 x'^2 + f' = 0\,,$$

on λ_1 és el valor propi no nul de Q i f' es calcula com a l'apartat anterior. La referència principal

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0)\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

està formada per una solució qualsevol (x_0, y_0) del sistema $QX = -L$ i una base ortonormal de vectors propis de la matriu Q, $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.


John Torrence Tate

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

En funció dels signes de λ_1 i f', l'equació reduïda es pot transformar en una de les següents:

$x'^2 = a^2$	$x'^2 = -a^2$
Rectes paral·leles reals	**Rectes paral·leles imaginàries**

$$x'^2 = 0$$

Recta doble

Exemple 7.15 Si tenim dues rectes paral·leles, per exemple $2x + y + 3 = 0$ i $2x + y - 2 = 0$ i multipliquem les seves equacions, obtindrem una equació de segon grau o cònica que representa un *parell de rectes paral·leles*.

$$(2x + y + 3)(2x + y - 2) = 0$$
$$4x^2 + 2xy - 4x + 2xy + y^2 - 2y + 6x + 3y - 6 = 0$$
$$4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0\,.$$

De la mateixa manera, donada la recta $2x + y + 3 = 0$, si elevem la seva equació al quadrat, obtindrem la cònica anomenada *recta doble*.

$$(2x + y + 3)^2 = 0$$
$$4x^2 + y^2 + 9 + 4xy + 12x + 6y = 0$$
$$4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 6y + 9 = 0\,.$$

Còniques sense centre i un valor propi nul ($\lambda_2 = 0$)

En aquest cas el sistema d'equacions $QX + L = 0$ és incompatible, per tant, no podem trobar cap referència $\mathcal{R}'$ de manera que l'equació de la cònica en aquesta referència tingui els coeficients de x' i de y' nuls. Recordem però, que si fem el canvi de referència

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \qquad \text{on,} \qquad \vec{e}_1 = (c_{11}, c_{21}) \qquad \text{i} \qquad \vec{e}_2 = (c_{12}, c_{22})$$

on $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ són una base de vectors ortonormal propis de la matriu Q, els coeficients de x' i de y' en l'equació de la cònica en la referència $\mathcal{R}'$ venen donats per


Henri Paul Cartan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

$$L'^t = (QB+L)^tC = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Com que $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ són vectors propis de la matriu Q amb valors propis λ_1 i λ_2 i, si a més posem $\vec{\ell} = (d, e)$, tindrem que

$$L'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{e}_1 \cdot (x_0, y_0) + \vec{e}_1 \cdot \vec{\ell} & \lambda_2\vec{e}_2 \cdot (x_0, y_0) + \vec{e}_2 \cdot \vec{\ell} \end{pmatrix}$$

Si a més, tenim que $\lambda_2 = 0$, resulta que

$$L'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{e}_1 \cdot (x_0, y_0) + \vec{e}_1 \cdot \vec{\ell} & \vec{e}_2 \cdot \vec{\ell} \end{pmatrix}$$

Proposició 7.16 *Si λ és un valor propi no nul de la matriu Q i $\vec{u}$ és un vector propi de Q amb valor propi λ, l'equació*

$$\lambda\vec{u} \cdot (x, y) + \vec{u} \cdot \vec{\ell} = 0$$

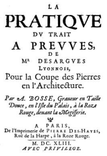
defineix una recta perpendicular al vector $\vec{u}$ que és un ***eix de simetria propi*** *de la cònica.*

Observació 7.17 El que podem fer en aquest cas és escollir el punt (x_0, y_0) de manera que s'anul·lin el coeficient de la x' i el terme independent i això ho podem fer perquè el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f &= 0 \\ \lambda_1\vec{u} \cdot (x, y) + \vec{u} \cdot \vec{\ell} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

té sempre una solució única en aquest tercer cas (cònica sense centre).

Amb aquesta observació ja podem enunciar el resultat sobre aquest tipus de cònica.



Gerard Desargues

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 7.18 *Si el sistema d'equacions $QX + L = 0$ és incompatible i escollim la referència $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0); \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, on (x_0, y_0) és la solució de 7.5 i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és una base ortonormal de vectors propis de Q, l'equació de la cònica en la referència $\mathcal{R}'$ serà*

$$\lambda_1 x'^2 + 2e'y' = 0\,, \tag{7.6}$$

on λ_1 és el valor propi no nul de Q

$$e' = \vec{e}_2 \cdot \vec{\ell}\,.$$

A més, $e' \neq 0$, la cònica és una ***paràbola*** *i el punt (x_0, y_0) és el* ***vèrtex*** *de la paràbola.*

Observació 7.19 Les el·lipses i les hipèrboles tenen dos eixos de simetria que coincideixen amb els eixos de coordenades de la referència principal. Les paràboles només tenen un eix de simetria que és perpendicular al vector propi amb valor no nul i coincideix amb l'eix d'ordenades de la referència principal. Els parells de rectes reals paral·leles tenen un eix de simetria propi i infinits eixos de simetria que no són propis.

Exemple 7.20 Classificació i càlcul dels elements geomètrics de la cònica d'equació

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 30x - 10y + 75 = 0\,.$$

Les matrius i el terme indepemdent d'aquesta cònica són

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 75\,.$$

El polinomi característic de la matriu Q és

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

i els seus valors propis $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 0$. Per trobar els vectors propis, hem de resoldre els sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


Jesse Douglas

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Per resoldre el primer sistema d'equacions, triangulem la matriu corresponent

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i veiem que solució és $x + 2y = 0$, és a dir, la recta de vectors propis amb valor propi 5 és la generada pel vector $(2, -1)$ i, per tant, la recta de vectors propis amb valor propi 0 és la generada per un vector perpendicular a l'anterior, per exemple $(1, 2)$.

Ara hem de veure si aquesta cònica té centre o no i, per això hem de resoldre el sistema d'equacions $QX = -L$, del que triangulem la matriu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 15 \\ -2 & 1 & 5 \end{array}\right)_{F_2 \sim 2F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 25 \end{array}\right),$$

que evidentment és incompatible. Per tant, ja sabem que aquesta cònica és una *paràbola*.

El pas següent és trobar l'*eix de simetria* i el *vèrtex* de la paràbola. L'equació de l'eix de simetria és

$$\lambda_1 \vec{u} \cdot (x, y) + \vec{u} \cdot \vec{\ell} = 0$$

$$5(2, -1) \cdot (x, y) + (2, -1) \cdot (-15, -5) = 0$$

$$5(2x - y) - 25 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

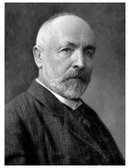
i, per trobar el vèrtex, hem de resoldre el sistema 7.5, és adir,

$$\left.\begin{array}{c} 4x^2 - 4xy + y^2 - 30x - 10y + 75 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{array}\right\}.$$

De la segona equació aïllem $y = 2x - 5$ i, en substituir a la primera, tenim que

$$4x^2 - 4x(2x - 5) + (2x - 5)^2 - 30x - 10(2x - 5) + 75 = 0$$

$$4x^2 - 8x^2 + 20x + 4x^2 - 20x + 25 - 30x - 20x + 50 + 75 = 0$$


Georg Cantor

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Takakazu Seki

$$-50x+150=0$$
$$x=3\,.$$

De la igualtat $y=2x-5$, obtenim que $y=1$, és a dir, el vèrtex de la paràbola és el punt $V=(3,1)$. Aleshores la *referència principal* de la paràbola és

$$\mathcal{R}'=\left\{(3,1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\right\}$$

i, per a l'equació reduïda, només cal calcular

$$e'=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\cdot(-15,-5)=-\frac{25}{\sqrt{5}}=-5\sqrt{5}\,.$$

Per tant, l'*equació reduïda* de la paràbola és

$$5x'^2-10\sqrt{5}\,y'=0 \qquad \text{o bé,} \qquad y'=\frac{x'^2}{2\sqrt{5}}$$

i el *paràmetre* de la paràbola és $p=\sqrt{5}$.

El *focus de la paràbola* és el punt de coordenades $F=\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)_{\mathcal{R}'}$, mentre que la seva *recta directriu* és la recta que passa pel punt $F'=\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)_{\mathcal{R}'}$ i és paral·lela a l'eix de les x'. Les coordenades d'aquests dos punts en la referència canònica són

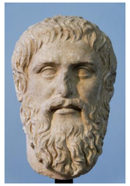
$$F=\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)_{\mathcal{R}'}=(3,1)+\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)=\left(\frac{7}{2},2\right)$$

$$F'=\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)_{\mathcal{R}'}=(3,1)-\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)=\left(\frac{5}{2},0\right).$$

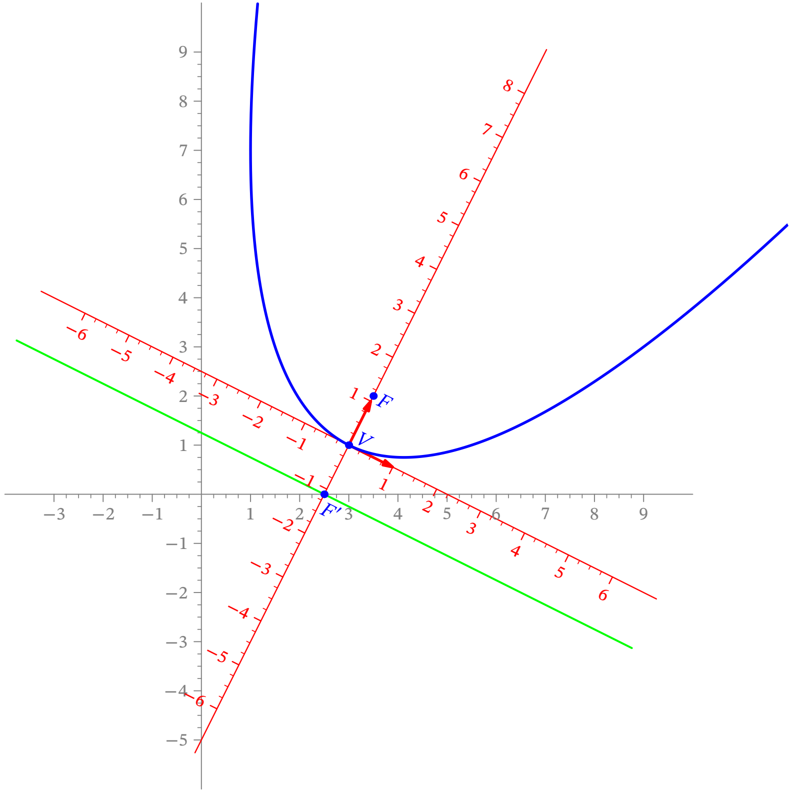
La recta directriu passa pel punt $F'=\left(\frac{5}{2},0\right)$ i té vector director $(2,-1)$, per tant, la seva equació és

$$2x+4y=5\,.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Plato of Athens

El gràfic de la paràbola i els seus elements geomètrics és



Classificació de les quàdriques

De la mateixa manera que les *còniques són corbes* en el pla definides per equacions de segon grau amb dues variables o incògnites, les *quàdriques són superfícies* a l'espai definides també per equacions de segon grau, però amb tres variables o incògnites.

El desenvolupament d'aquesta secció és idèntic al de la secció anterior, amb l'única diferència que les matrius, vectors i coordenades que hi apareixen són en dimensió tres i que hi ha més varietat de quàdriques que de còniques.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.21 Anomenarem **quàdrica** a qualsevol *superfície* de l'espai formada per les solucions d'una equació polinòmica de segon grau del tipus

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + f = 0\,. \tag{7.7}$$

Observació 7.22 L'equació 7.7 de les quàdriques es pot escriure en *forma matricial* de la forma següent:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f = 0\,. \tag{7.8}$$

Definició 7.23 Les matrius

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad L = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

s'anomenen **matriu de la part quadràtica** i **matriu de la part lineal** de la quàdrica.

Aleshores, podem escriure les equacions de les quàdriques de la mateixa manera que la de les còniques

$$X^tQX + 2L^tX + f = 0 \qquad \text{on} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f \quad \text{és el terme independent.}$$


Thomas Young

Proposició 7.24 *Si apliquem el canvi de coordenades $X = B + CX'$ a la quàdrica $X^tQX + 2L^tX + f = 0$, obtenim*

$$X'^tQ'X' + 2L'^tX' + f' = 0 \qquad \textit{on} \qquad Q' = C^tQC\,, \qquad L' = C^t(QB + L) \qquad \textit{i} \qquad f' = B^tQB + 2L^tB + f\,.$$

Com en el cas de les còniques, de vegades farem servir que $L'^t = (QB + L)^tC$.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 7.25 Del capítol anterior, sabem que donada una matriu simètrica Q, existeix una matriu ortogonal C tal que $Q' = C^tQC$ és diagonal i, a més,

$$Q' = C^tQC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

on λ_1, λ_2 i λ_3 són els valors propis de la matriu Q. Dit d'una altra manera, la matriu Q té una *base ortonormal de vectors propis* $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Proposició 7.26 *Si el sistema d'equacions* $QX + L = 0$ *és compatible i escollim la referència* $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, *on* (x_0, y_0, z_0) *és una solució de* $QX = -L$ *i* $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *és una base ortonormal de vectors propis de Q, l'equació de la quàdrica en la referència* $\mathcal{R}'$ *serà*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + f' = 0\,, \qquad (7.9)$$

on λ_1, λ_2 λ_3 *són els valors propis de Q i*

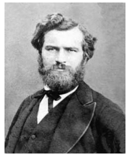
$$f' = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 2L^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + f\,.$$

Les solucions del sistema $QX + L = 0$ són *punts de simetria* de la quàdrica, motiu pel qual s'anomenen **centre o centres de la quàdrica** depenent si l'anterior sistema és compatible determinant o indeterminat. La referència $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ obtinguda tal com es descriu a la proposició anterior s'anomena **referència principal** de la quàdrica.

Si el sistema $QX + L = 0$ és compatible, ja podem distingir uns quants tipus de quàdriques en funció dels signes de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i f'.

Quàdriques amb tres valors propis no nuls

Es tracta de quàdriques amb un únic centre (el sistema d'equacions $QX + L = 0$ és compatible determinat) ja que el determinant de Q és igual al producte dels seus valors propis i, per tant, diferent de zero.



Camille Jordan

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Jean-Baptiste le Rond d'Alembert

L'equació de la quàdrica en la referència principal és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + f' = 0\,,$$

que en funció dels signes de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i f' es pot transformar en una de les equacions reduïdes següents:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$
El·lipsoide real

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$$
El·lipsoide imaginari

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$
Hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = -1$$
Hiperboloide de dues fulles

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0$$
Con imaginari

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$$
Con real

Exemple 7.27 Càlcul de la referència principal i de l'equació reduïda de la quàdrica d'equació

$$x^2 + y^2 - 4xy - 2xz - 2yz - 10x + 2y = 0\,.$$

Les matrius i el terme independent d'aquesta quàdrica són

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 0\,.$$

El polinomi característic de la matriu Q és

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - 2 - 2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) + 4\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6\,.$$

Trobem una de les seves arrels per Ruffini,

	-1	2	5	-6
1		-1	1	6
	-1	1	6	0

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

i les altres dues amb l'equació de segon grau $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$,

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} .$$

Els valors propis de Q són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -2$, és a dir, tres valors propis no nuls. Ja sabem que el sistema d'equacions $QX = -L$ serà compatible determinat.
Trobem la seva solució triangulant la matriu corresponent:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Aleshores,

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - z &= 5 \\ -3y - 3z &= 9 \\ -2z &= 4 \end{aligned}\right\} ; \quad \left.\begin{aligned} x - 2y - (-2) &= 5 \\ -3y - 3(-2) &= 9 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} ; \quad \left.\begin{aligned} x - 2(-1) &= 3 \\ y &= -1 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} ; \quad \left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} ,$$

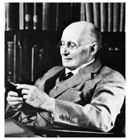
és a dir, el centre de la quàdrica és el punt $C = (1, -1, -2)$.

Els vectors propis de Q són les solucions dels sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anem, doncs, a resoldre'ls

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 2F_3 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$


Alfred North Whitehead

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Edmond Halley

La solució és

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ z = -2y \end{array}\right\}$$

i la recta de vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 1$ està generada pel vector $(1, 1, -2)$.

Per resoldre el segon sistema, triangulem la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right),$$

la solució del qual és

$$\left.\begin{array}{l} x = -y \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Per tant, la recta de vectors propis amb valor propi $\lambda_2 = 3$ està generada pel vector $(1, -1, 0)$.

Com que els vectors propis amb valor propi $\lambda_3 = -2$ han de ser perpendiculars als obtinguts fins ara i

$$(1, 1, -2) \times (-1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, 2) \simeq (1, 1, 1)$$

podem afirmar que la *referència principal de la quàdrica* és

$$\mathcal{R}' = \left\{(1, -1, -2); \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right\}.$$

Per a obtenir el terme independent de l'equació reduïda de la quàdrica, hem de calcular

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -6,$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


George Pólya

per tant, l'*equació reduïda de la quàdrica* és

$$x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 - 6 = 0 \qquad \text{o bé,} \qquad \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{3} = 1\,.$$

i la quàdrica és un *hiperboloide d'una fulla*.

Quàdriques amb centre i dos valors propis no nuls ($\lambda_3 = 0$)

Es tracta de quàdriques amb una *recta de centres* (el sistema $QX = -L$ és compatible indeterminat amb un grau de llibertat) i la seva equació en la referència principal és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' = 0\,,$$

on λ_1 i λ_2 són els valors propis no nuls de Q i f' es calcula com a l'apartat anterior. La referència principal

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

està formada per una solució qualsevol (x_0, y_0, z_0) del sistema $QX = -L$ i una base ortonormal de vectors propis de la matriu Q.

Segons els signes de λ_1, λ_2 i f' tenim les següents opcions

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ **Cilindre el·líptic real**	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ **Cilindre el·líptic imaginari**	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ **Cilindre hiperbòlic**
$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1$ **Cilindre hiperbòlic**	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ **Plans secants imaginaris**	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ **Plans secants reals**

En aquest cas procedirem exactament com a l'exemple anterior, l'única diferència és que el sistema d'equacions $QX = -L$ és compatible indeterminat. Aleshores, escollirem una de les seves solucions com a origen de la *referència principal*.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 7.28 Càlcul de la referència principal i de l'equació reduïda de la quàdrica d'equació

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy - 2xz - 8yz + 6x + 30y + 18z - 51 = 0\,.$$

Les matrius i el terme independents d'aquesta quàdrica són

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -51\,.$$

El polinomi característic de la matriu Q és

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 + 4 + 4 - (-2-\lambda) - 16(1-\lambda) - (-2-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^3) + 8 - 12 + 18\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 18)\,.$$

Una de les arrels del polinomi característic és $\lambda = 0$ i les altres dues s'obtenen de l'equació de segon grau $\lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0$:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} = \begin{cases} 3 \\ -6 \end{cases}.$$

Els valors propis de Q són $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -6$ i $\lambda_3 = 0$. A continuació hem de veure si el sistema d'equacions $QX = -L$ és compatible indeterminat o incompatible.
El resolem triangulant la matriu corresponent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & -15 \\ -1 & -4 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -12 \\ 0 & -3 & -3 & -12 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_3 - F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

És evident que el sistema és compatible indeterminat i que la seva solució general és

$$\left.\begin{array}{l} x = -7 + 2z \\ y = 4 - z \end{array}\right\}.$$


Jean Gaston Darboux

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Jacques Hadamard

Com que com a origen de la referència $\mathcal{R}'$ podem escollir qualsevol de les solucions d'aquest sistema, prenem $C = (-7, 4, 0)$.

Els vectors propis de Q són les solucions dels sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per trobar els vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 3$ hem de triangular la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim 2F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_3 - F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i la recta de vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 3$ està generada pel vector $(1, 1, -1)$.

De manera semblant resolem el segon sistema d'equacions i obtenim que la recta de vectors propis amb valor propi $\lambda_2 = -6$ està generada pel vector $(0, 1, 1)$.

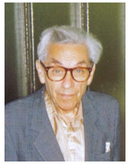
Com que els vectors propis amb valor propi $\lambda_3 = 0$ han de ser perpendiculars als obtinguts fins ara i

$$(1, 1, -1) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1)$$

podem afirmar que la *referència principal de la quàdrica* és

$$\mathcal{R}' = \left\{(-7, 4, 0); \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)\right\}.$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Paul Erdös

Per a obtenir el terme independent de l'equació reduïda de la quàdrica, hem de calcular

$$f' = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 51 = -12,$$

per tant, l'*equació reduïda de la quàdrica* és

$$3x'^2 - 6y'^2 - 12 = 0 \qquad \text{o bé,} \qquad \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

i la quàdrica és un *cilindre hiperbòlic*.

Quàdriques amb centre i un valor propi no nul ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

Es tracta de quàdriques amb un *pla de centres* (el sistema $QX = -L$ és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat) i la seva equació en la referència principal és

$$\lambda_1 x'^2 + f' = 0,$$

on λ_1 és el valor propi no nul de Q i f' es calcula com a l'apartat anterior. La referència principal

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0); \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

està formada per una solució qualsevol (x_0, y_0, z_0) del sistema $QX = -L$ i una base ortonormal de vectors propis de la matriu Q.

Segons els signes de λ_1 i f' tenim les següents opcions

$x'^2 = a^2$	$x'^2 = -a^2$	$x'^2 = 0$
Plans paral·lels reals	**Plans paral·lels imaginaris**	**Pla doble**

Quàdriques sense centre i dos valors propis no nuls ($\lambda_3 = 0$)

Ens trobem com en el cas de la paràbola en dimensió 2, és a dir, el sistema d'equacions $QX = -L$ és incompatible i no hi ha cap canvi de coordenades que transformi l'equació inicial de la quàdrica en una que no tingui termes en x', y' i z'.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

De manera semblant al que havíem vist per a dimensió 2, siguin (x_0, y_0, z_0) un punt qualsevol i

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

una referència on $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és una base ortonormal de vectors propis de Q amb valors propis λ_1, λ_2 i λ_3. L'equació de la quàdrica en la referència $\mathcal{R}'$ compleix que

$$L'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{e}_1 \cdot (x_0, y_0, z_0) + \vec{e}_1 \cdot \vec{\ell} & \lambda_2\vec{e}_2 \cdot (x_0, y_0, z_0) + \vec{e}_2 \cdot \vec{\ell} & \lambda_3\vec{e}_3 \cdot (x_0, y_0, z_0) + \vec{e}_3 \cdot \vec{\ell} \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

Si, a més tenim que $\lambda_3 = 0$, resulta que

$$L'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{e}_1 \cdot (x_0, y_0, z_0) + \vec{e}_1 \cdot \vec{\ell} & \lambda_2\vec{e}_2 \cdot (x_0, y_0, z_0) + \vec{e}_2 \cdot \vec{\ell} & \vec{e}_3 \cdot \vec{\ell} \end{pmatrix}$$

Proposició 7.29 *Si λ és un valor propi no nul de la matriu Q i $\vec{u}$ és un vector propi de Q amb valor propi λ, l'equació*

$$\lambda\vec{u} \cdot (x, y, z) + \vec{u} \cdot \vec{\ell} = 0$$

defineix un pla perpendicular al vector $\vec{u}$ que és un ***pla de simetria propi*** *de la quàdrica.*

Observació 7.30 El que podem fer en aquest cas és escollir el punt (x_0, y_0, z_0) de manera que s'anul·lin el coeficient de la x', el de la y' i el terme independent i això ho podem fer perquè el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + f = 0 \\ \lambda_1\vec{u}_1 \cdot (x, y, z) + \vec{u}_1 \cdot \vec{\ell} = 0 \\ \lambda_2\vec{u}_2 \cdot (x, y, z) + \vec{u}_2 \cdot \vec{\ell} = 0 \end{array}\right\}, \tag{7.11}$$

on $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són vectors propis linealment independents amb valors propis λ_1 i λ_2, té sempre una solució única.


André-Marie Ampère

Barcelona TECH
ESEIAAT
Àlgebra Lineal
Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Amb aquesta observació ja podem enunciar el resultat sobre aquest tipus de quàdrica.

Proposició 7.31 *Si el sistema d'equacions $QX+L=0$ és incompatible i escollim la referència $\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, on (x_0, y_0, z_0) és la solució de 7.11 i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és una base ortonormal de vectors propis de Q, l'equació de la quàdrica en la referència $\mathcal{R}'$ serà*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2e'z' = 0\,, \tag{7.12}$$

on λ_1 i λ_2 són els valors propis no nuls de Q i

$$e' = \vec{e}_3 \cdot \vec{\ell}\,.$$

En funció dels signes de λ_1, λ_2 i e' es pot transformar en una de les equacions reduïdes següents:

$z' = \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2}$	$z' = -\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2}$	$z' = \dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2}$	$z' = -\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2}$
Paraboloide el·líptic	**Paraboloide el·líptic**	**Paraboloide hiperbòlic**	**Paraboloide hiperbòlic**

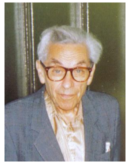
Exemple 7.32 Classificació de la quàdrica d'equació

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 10x - 10y + 2z - 2 = 0$$

i determinació dels seus elements característics.

Les matrius de la quàdrica són

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\,. \qquad \text{i} \qquad f =$$



Paul Erdös

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

i el polinomi característic de la matriu Q és

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 4-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda=-\lambda(\lambda^2-12\lambda+36)\,,$$

una de les seves arrels és $\lambda=0$ i les altres dues s'obtenen de l'equació de segon grau $\lambda^2-12\lambda+36=0$,

$$\lambda=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\frac{12\pm0}{2}=\begin{cases}6\\6\end{cases}.$$

Per tant, els valors propis de Q són $\lambda_1=6$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_3=0$.
Per determinar si la quàdrica té centre, hem de resoldre el sistema d'equacions $QX=-L$ i ho fem triangulant la matriu corresponent.

$$\left(\begin{array}{rrr|r}4&-2&-2&5\\-2&4&-2&5\\-2&-2&4&-1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\sim 2F_2+F_1\\F_3\sim 2F_3+F_1}}{\simeq}\left(\begin{array}{rrr|r}4&-2&-2&5\\0&6&-6&15\\0&-6&6&3\end{array}\right)\underset{F_3\sim F_3+F_2}{\simeq}\left(\begin{array}{rrr|r}4&-2&-2&5\\0&6&-6&15\\0&0&0&18\end{array}\right),$$

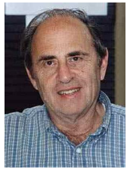
és a dir, el sistema és incompatible i la quàdrica és un *paraboloide el·líptic* i, com que la matriu Q té un valor propi amb multiplicitat 2, podem dir que es tracta d'un *paraboloide de revolució*.

Com sempre, els vectors propis són les solucions dels sistemes d'equacions

$$\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\text{i}\quad\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i comencem resolent el primer triangulant la seva matriu

$$\left(\begin{array}{rrr|r}-2&-2&-2&0\\-2&-2&-2&0\\-2&-2&-2&0\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\sim F_2-F_1\\F_3\sim F_3-F_1}}{\simeq}\left(\begin{array}{rrr|r}-2&-2&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$


Paul Joseph Cohen

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

La seva solució és $x+y+z=0$ i el pla de vectors propis amb valor propi $\lambda_1=6$ està generat pels vectors $(1,0,-1)$ i $(0,1,-1)$.

Com que necessitem una base ortonormal de vectors propis, hem d'aplicar el mètode de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (1,0,-1)\\ \vec{v}_2 &= (0,1,-1)-\frac{(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}(1,0,-1)=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)\\ &= \frac{1}{2}(-1,2,-1)\simeq(1,-2,1)\,.\end{aligned}$$

Com que els vectors propis amb valor propi $\lambda_3=0$ han de ser perpendiculars al pla de vectors propis amb valor propi $\lambda_1=6$, que té equació $x+y+z=0$, és immediat que formen la recta generada pel vector $(1,1,1)$.

Per trobar el *vèrtex* del paraboloide, necessitem *dos plans de simetria*, i els trobarem a partir dels vectors $(1,0,-1)$ i $(0,1,-1)$, els dos vectors propis amb valor propi 6:

$$\left.\begin{aligned}6(1,0,-1)\cdot(x,y,z)+(1,0,-1)\cdot(-5,-5,1)=0\\ 6(0,1,-1)\cdot(x,y,z)+(0,1,-1)\cdot(-5,-5,1)=0\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned}6(x-z)-6=0\\ 6(y-z)-6=0\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned}x-z-1=0\\ y-z-1=0\end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, hem de resoldre el sistema 7.11

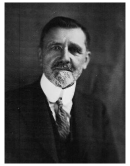
$$\left.\begin{aligned}4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4xz-4yz-10x-10y+2z-2=0\\ x-z-1=0\\ y-z-1=0\end{aligned}\right\}.$$

Substituint $x=z+1$ i $y=z+1$ a la primera equació obtenim

$$\begin{gathered}4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4xz-4yz-10x-10y+2z-2=0\\ 4(z+1)^2+4(z+1)^2+4z^2-4(z+1)(z+1)-4(z+1)z-4(z+1)z-10(z+1)-10(z+1)+2z-2=0\\ -18z-18=0\end{gathered}$$

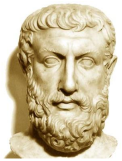
$$z=-1\,,$$

i el *vèrtex* és el punt $V=(0,0,-1)$.



Émile Borel

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
María Jesús Pérez
Miquel Noguera
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Parmenides of Elea

Com que la base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,-2,1),(1,1,1)\}$ té orientació negativa i, normalment escollirem referències positives, canviem de signe el primer vector. Tinguem en compte que la referència principal d'una cònica o única quàdrica no és única, ja que podem canviar d'ordre i de signe els vectors o, en aquest exemple, escollir una altra base ortonormal de vectors propis amb valor propi $\lambda_1 = 6$.
Aleshores, la referència principal del paraboloide escollida és

$$\mathcal{R}' = \left\{(0,0,-1)\,;\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\},$$

i per trobar l'equació reduïda, només cal que calculem

$$e' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot(-5,-5,1) = -\frac{9}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}\,.$$

Així, doncs, l'*equació reduïda* del paraboloide de revolució és

$$6x'^2 + 6y'^2 - 6\sqrt{3}\,z' = 0 \qquad \text{o bé,} \qquad z' = \frac{x'^2}{\sqrt{3}} + \frac{y'^2}{\sqrt{3}}$$

Quàdriques sense centre i un valor propi no nul $(\lambda_2 = \lambda_3 = 0)$

Ens trobem ara amb un sistema d'equacions $QX + L = 0$ incompatible, una matriu Q de rang 1 i tampoc hi ha cap canvi de coordenades que transformi l'equació inicial de la quàdrica en una que no tingui termes en x', y' i z'. Ara bé, si

$$\mathcal{R}' = \{(x_0,y_0,z_0)\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$$

és una referència amb $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ base ortonormal de vectors propis de Q, la part lineal de l'equació de la quàdrica en la referència $\mathcal{R}'$ serà, d'acord amb 7.10,

$$L'^t = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{e}_1\cdot(x_0,y_0,z_0) + \vec{e}_1\cdot\vec{\ell} & \vec{e}_2\cdot\vec{\ell} & \vec{e}_3\cdot\vec{\ell} \end{pmatrix},$$

on $\vec{e}_1$ té valor propi $\lambda_1 \neq 0$ i $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ tenen valor propi nul. El que podem fer en aquesta cas és que, a l'equació reduïda s'anul·lin els coeficients de x', y' i el terme independent.

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Endre Szemerédi

Proposició 7.33 *Donada una quàdrica sense centre i un valor propi no nul, el sistema d'equacions*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + f = 0 \\ \lambda_1\vec{u}\cdot(x,y,z) + \vec{u}\cdot\vec{\ell} = 0 \end{array}\right\}, \tag{7.13}$$

on $\vec{u}$ és un vector propi de Q amb valor propi no nul, té com a solució una recta anomenada ***recta de vèrtexs de la quàdrica****.*

Observació 7.34 Si escollim un referència

$$\mathcal{R}' = \{(x_0, y_0, z_0)\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

on (x_0, y_0, z_0) és una solució de 7.13, $\vec{e}_1$ és un vector propi unitari amb valor propi λ_1, $\vec{e}_2$ és un vector unitari en la direcció de $\vec{e}_1 \times \vec{\ell}$ i $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, l'equació de la quàdrica en la referència $\mathcal{R}'$ serà

$$\lambda_1 x'^2 + 2e'z' = 0\,, \tag{7.14}$$

on $e' = \vec{e}_3 \cdot \vec{\ell}$. Aquesta quàdrica s'anomena **cilindre parabòlic**.

Exemple 7.35 Classificació de la quàdrica d'equació

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 32x - 8y + 32z + 4 = 0$$

i càlcul dels seus elements geomètrics.
Les matrius i el terme independent de la quàdrica són

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 4\,.$$

i ja es veu a simple vista que la matriu Q té rang 1 ja que les seves tres columnes són múltiples de $(1, 1, 2)$.

A més,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

és a dir, el vector $(1,1,2)$ és un vector propi de Q amb valor propi $\lambda_1 = 6$. Així doncs, sense calcular el polinomi característic ja sabem que els valors propis de Q són $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = 0$ amb multiplicitat 2.

D'altra banda, L no és múltiple de les columnes de Q, per tant el sistema d'equacions $QX + L = 0$ és incompatible i ja sabem que aquesta quàdrica és un *cilindre parabòlic*.

Els dos vectors propis amb valor propi nul que formaran la referència principal els obtenim amb dos productes vectorials

$$(1,1,2)\times(4,1,-4) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-6,12,-3) \simeq (2,-4,1) \qquad \text{i} \qquad (1,1,2)\times(2,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (9,3,-6) \simeq (3,1,-2).$$

Ara hem de trobar la *recta de vèrtexs del cilindre parabòlic* resolent el sistema 7.13. L'equació del pla propi de simetria és

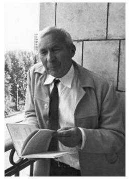
$$6(1,1,2)\cdot(x,y,z) + (1,1,2)\cdot(-16,-4,16) = 0$$
$$6(x+y+2z) + 12 = 0$$
$$x + y + 2z + 2 = 0$$

Resolem, doncs, el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 32x - 8y + 32z + 4 = 0 \\ x + y + 2z + 2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

aïllant $y = -x - 2z - 2$ de la segona equació i substituint-ho a la primera,

$$\left.\begin{gathered} x^2 + (-x-2z-2)^2 + 4z^2 + 2x(-x-2z-2) + 4xz + 4(-x-2z-2)z - 32x - 8(-x-2z-2) + 32z + 4 = 0 \\ x^2 + x^2 + 4z^2 + 4 + 4xz + 4x + 8z + 4z^2 - 2x^2 - 4xz - 4x + 4xz - 4xz - 8z^2 - 8z - 32x + 8x + 16z + 16 + 32z + 4 = 0 \\ -24x + 48z + 24 = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{gathered}\right\}$$



Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí


Bernard Bolzano

Per tant, la recta de vèrtex té equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z + 2 &= 0 \\ x - 2z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Aquesta recta té vector director $(2,-4,1)$ com ja sabíem i, si prenem $z=0$, obtenim que $x=2$ i $y=-4$. Per tant, com a origen de la referència principal, escollim el punt $(2,-4,0)$.

Per tant, la *referència principal* del cilindre parabòlic és

$$\mathcal{R}' = \left\{(2,-4,0)\,;\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),\frac{1}{\sqrt{21}}(2,-4,1),\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)\right\}.$$

Finalment,

$$e' = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)\cdot(-16,-4,16) = -\frac{84}{\sqrt{14}} = -6\sqrt{14}$$

i l'*equació reduïda* del cilindre parabòlic serà

$$6x'^2 - 12\sqrt{14}\,z' = 0 \qquad \text{o bé,} \qquad z' = \frac{x'^2}{2\sqrt{14}}.$$