UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques
Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Departament de Matemàtiques

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Àlgebra Lineal Exercicis Resolts

Rafel Amer
Vicenç Sales

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1 de setembre de 2023

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques
Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Àlgebra Lineal
Exercicis Resolts

Rafel Amer
Vicenç Sales

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1 de setembre de 2023

Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
Colom 11
08222 Terrassa

`rafel.amer@upc.edu`

Introducció

Aquesta col·lecció d'exercicis d'Àlgebra Lineal és el resultat de les classes impartides per la Secció del Departament de Matemàtiques a l'Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa des de la posada en marxa del nou pla d'estudis.

S'han inclòs exercicis similars als explicats a classe per tal d'aconseguir una major comprensió dels conceptes teòrics desenvolupats juntament amb d'altres d'un major grau de dificultat que intenten aclarir aquells punts en els quals hem constatat que els estudiants tenen més dificultats. No cal oblidar, però, que per assolir aquesta comprensió és imprescindible l'esforç i el treball personal, tant pel que fa a l'estudi dels conceptes com a la resolució dels exercicis. Esperem que sigui d'utilitat als estudiants i els aconsellem que intentin resoldre els problemes abans de llegir-ne la solució. En molts casos, segurament, trobaran solucions alternatives a les donades.

Els temes que es tracten són habituals en qualsevol curs d'Àlgebra Lineal i s'ha dedicat especial atenció als seus aspectes geomètrics. Així, els capítols 4 i 7 estan dedicats a la Geometria del pla i de l'espai i a l'estudi de les còniques i quàdriques, respectivament.

Encara que, inicialment, els exercicis estiguin pensats per a estudiants de Graus d'Enginyeria, també poden ser útils als estudiants de Matemàtiques, Física i, en general, a tots aquells que hagin de cursar la matèria d'Àlgebra Lineal.

Rafel Amer i Vicenç Sales

Índex

Capítol 1

Matrius i sistemes d'equacions lineals

1.1 Matrius

Exercici 1

Si A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu $A + B$.

Solució

Cal sumar els coeficients de la mateixa fila i columna:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 2

Si A és la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu $-3A$.

Solució

Cal multiplicar cada coeficient per l'escalar:

$$-3A = -3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 6 & 3 \\ -12 & 3 & -6 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Exercici 3

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

calculeu la segona columna i la tercera fila de la matriu AB.

Solució

Els elements de la segona columna de la matriu AB s'obtenen multiplicant cadascuna de les files de la matriu A per la segona columna de la matriu B, que es pot fer conjuntament:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

I els elements de la tercera fila de la matriu AB s'obtenen multiplicant la tercera fila de la matriu A per cadascuna de les columnes de la matriu B, que es pot fer de nou conjuntament:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 4

Si A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu AB.

Solució

Cal sumar els productes dels elements respectius de cada fila d'A i de cada columna de B:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercici 5

Si A és la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu A^4.

Solució

Com que

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 ,$$

el que farem és calcular primer A^2 i aplicar després la igualtat anterior.

Tenim, doncs, que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

I, per tant, ens queda que

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 44 & 29 \\ -12 & -31 & -42 \\ -63 & 33 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 6

Si A és la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu A^t.

Solució

Cal canviar els papers de les files i les columnes:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 7

Si A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu les matrius AB i BA.

Solució

Tenim que

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -7 & 13 & 3 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

i

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 7 \\ 8 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 8

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu quadrada d'ordre 2 no nu"la B tal que $AB = 0$.

Solució

A partir de la condició

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s'obtenen les equacions

$$\left.\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + d &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

I prenent

$$a = b = 1 \qquad \text{i} \qquad c = d = -1$$

per exemple, obtenim la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 9

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu dues matrius quadrades diferents d'ordre 2 no nu"les B i C tals que $AB = AC$.

Solució

A partir de la condició

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

s'obtenen les equacions

$$\left.\begin{aligned} a + c &= a' + c' \\ b + d &= b' + d' \end{aligned}\right\}$$

o, equivalentment,

$$\left.\begin{aligned} a + c - a' - c' &= 0 \\ b + d - b' - d' &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

I prenent

$$a = b = 1 \qquad \text{i} \qquad c = d = -1$$

d'una banda i

$$a' = b' = -1 \qquad \text{i} \qquad c' = d' = 1$$

d'una altra per exemple, obtenim les matrius

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercici 10

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

comproveu que no hi ha cap matriu quadrada d'ordre 2 no nu"la X tal que $AX = I$.

Solució

A partir de la condició

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

s'obtenen les equacions

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 1 \\ a + b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

i

$$\left.\begin{aligned} a' + b' &= 1 \\ a' + b' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que, evidentment, no tenen solució.

Exercici 11

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

trobeu dues matrius del tipus

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

tals que $A = LU$.

Solució

Tenim que

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 4a & a+d & -2a+e \\ 4b & b+cd & -2b+ce+f \end{pmatrix},$$

que equival a

$$\left.\begin{aligned} 4a &= -3 \\ a+d &= -1 \\ -2a+e &= 2 \end{aligned}\right\}$$

i

$$\left.\begin{aligned} 4b &= 1 \\ b+cd &= 1 \\ -2b+ce+f &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, de la primera equació del primer sistema es dedueix que

$$a = -\frac{3}{4}$$

que, substituint a les altres dues i aïllant, queda

$$d = -\frac{1}{4} \qquad \text{i} \qquad e = \frac{1}{2}.$$

I, d'altra banda, de la primera equació del segon sistema es té que

$$b = \frac{1}{4}$$

que, substituint també a les altres dues equacions d'aquest sistema, dona

$$c = -3 \qquad \text{i} \qquad f = 1.$$

En conseqüència, tenim que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$L = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -12 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 12

Es consideren les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resoleu l'equació matricial $A + X = B$.

Solució

La solució és $X = B - A$:

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 13

Es considera la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resoleu l'equació matricial $-2X = A$.

Solució

La solució és $X = -\frac{1}{2}A$:

$$X = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 14

Es considera la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resoleu l'equació matricial $X^t = A$.

Solució

La solució és $X = A^t$:

$$X = A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 15

Esbrineu si les matrius següents són simètriques:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Com que, transposant la matriu A, es té que

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A\,,$$

es dedueix que la matriu A no és simètrica.

(b) Com que, transposant la matriu B, es té que

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} = B\,,$$

es dedueix que la matriu B sí és simètrica.

Exercici 16

Determineu si les matrius quadrades d'ordre 2 següents són ortogonals:

$$\text{(a)}\quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Com que A és del tipus

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

amb

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1\,,$$

es dedueix que la matriu A sí és ortogonal.

(b) Com que B és del tipus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

però, en canvi, es té que

$$5^2 + 12^2 \neq 1\,,$$

es dedueix que la matriu B no és ortogonal.

(c) Com que C no és de cap dels dos tipus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

amb

$$a^2 + b^2 = 1\,,$$

es dedueix que la matriu C no és ortogonal.

Exercici 17

Analitzeu si les matrius quadrades d'ordre 3 següents són ortogonals:

$$\text{(a)}\quad A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix};\qquad \text{(b)}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix};\qquad \text{(c)}\quad C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Com que es té que

$$A^tA=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,$$

es dedueix que la matriu A no és ortogonal.

(b) Com que es té que

$$B^tB=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,$$

es dedueix que la matriu B no és ortogonal.

(c) Com que es té que

$$C^tC=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,$$

es dedueix que la matriu C sí és ortogonal.

Exercici 18

Determineu si les matrius quadrades d'ordre 4 següents són ortogonals:

$$\text{(a)}\quad A=\begin{pmatrix}4&2&2&1\\2&-4&-1&2\\2&1&-4&-2\\1&-2&2&-4\end{pmatrix};$$

$$\text{(b)}\quad B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4&2&2&1\\2&-4&-1&2\\2&1&-4&-2\\1&-2&2&-4\end{pmatrix};$$

$$\text{(c)}\quad C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&2&2&1\\2&-4&-1&2\\2&1&-4&-2\\1&-2&2&-4\end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Com que es té que

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \neq I,$$

es dedueix que la matriu A no és ortogonal.

(b) Com que es té que

$$B^tB = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{625}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/25 \end{pmatrix} \neq I,$$

es dedueix que la matriu B no és ortogonal.

(c) Com que es té que

$$C^tC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = I,$$

es dedueix que la matriu C sí és ortogonal.

Exercici 19

Donada la matriu

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

trobeu els valors de a, b i c sabent que A és una matriu ortogonal.

Solució

Recordem que una matriu quadrada A és ortogonal si $A^tA = I$. Calculem en primer lloc A^tA:

$$A^tA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & -2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a^2+5 & ab+4 & ac+2 \\ ab+4 & b^2+5 & bc-2 \\ ac+2 & bc-2 & c^2+8 \end{pmatrix}.$$

Si igualem aquesta matriu a la identitat tindrem que

$$\begin{pmatrix} a^2+5 & ab+4 & ac+2 \\ ab+4 & b^2+5 & bc-2 \\ ac+2 & bc-2 & c^2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

i, igualant terme a terme ens queden les equacions

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 4 \\ b^2 &= 4 \\ c^2 &= 1 \\ ab &= -4 \\ ac &= -2 \\ bc &= 2 \end{aligned}\right\} .$$

De les tres primeres equacions obtenim que

$$a = \pm 2\,, \qquad b = \pm 2 \qquad \text{i} \qquad c = \pm 1\,.$$

I de les tres últimes, que a i b han de tenir signes diferents i a i c també.

Per tant, hi ha dues possibles solucions: la primera és

$$a = -2\,, \qquad b = 2 \qquad \text{i} \qquad c = 1\,;$$

i la segona,

$$a = 2\,, \qquad b = -2 \qquad \text{i} \qquad c = -1\,.$$

1.2 Transformacions elementals

Exercici 20

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

apliqueu–li la transformació elemental

$$F_3 \sim 6F_3 - 4F_1$$

i comproveu que el resultat és el mateix que si multipliquem la matriu A per l'esquerra per la matriu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solució

Cal multiplicar cadascun dels elements de la tercera fila per 6 i restar–li el resultat de multiplicar per 4 l'element de la mateixa columna i la primera fila multiplicat per 4:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}_{F_3 \sim 6F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 26 & -30 & -12 \end{pmatrix}.$$

És immediat que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 26 & -30 & -12 \end{pmatrix}.$$

Exercici 21

Donada una matriu quadrada A, d'ordre 3, apliquem les transformacions elementals per files següents:

- En primer lloc,
$$F_2 \sim -3F_1 + 3F_2 \qquad \text{i} \qquad F_3 \sim -2F_1 - 2F_3$$
per a obtenir la matriu A'.
- En segon lloc, a la matriu A' li apliquem
$$F_3 \sim -2F_2 - F_3$$
per a obtenir la matriu B.

Trobeu una matriu T tal que $B = TA$

Solució

Recordem que aplicar la transformació elemental

$$F_i \sim tF_i + sF_j$$

amb $i \neq j$ a la matriu A és equivalent a multiplicar-la a l'esquerra per la matriu que s'obté aplicant la mateixa transformació elemental a la matriu identitat.

Apliquem, doncs, les tres transformacions elementals de l'enunciat a la matriu identitat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_2 \sim -3F_1 + 3F_2} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_3 \sim -2F_1 - 2F_3} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_3 \sim -2F_2 - F_3} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, aplicar a la matriu A les tres transformacions elementals de l'enunciat és el mateix que multiplicar-la per la matriu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 22

Trianguleu la matriu següent pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solució

Tenim que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{\substack{F_2\sim 2F_2-F_1 \\ F_3\sim F_3+2F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 3 & -4 \end{pmatrix}_{F_3\sim F_3+3F_2} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 23

Calculeu el rang i determineu files i columnes linealment independents en nombre màxim de la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que les dues columnes de la matriu no són proporcionals, el rang ha de ser almenys 2. Però, com que no hi ha més columnes, el rang no pot ser major i es conclou que el seu rang és 2.

Per tant, totes dues columnes

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

són linealment independents en nombre màxim.

I pel que fa a les files, no podem agafar les dues primeres perquè són oposades i, per tant, proporcionals. Però sí podem prendre per exemple la primera i la tercera

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix},$$

que no són proporcionals i són, per tant, files linealment independents en nombre màxim.

Exercici 24

Calculeu pel mètode de Gauss el rang i determineu files i columnes linealment independents en nombre màxim de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Triangulant, tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{F_2\sim F_2-2F_1\\ F_3\sim F_3-5F_1\\ F_4\sim F_4-7F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}_{\substack{F_3\sim F_3-2F_2\\ F_4\sim F_4-2F_2}}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{F_3\leftrightarrow F_4} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I com que el rang és 3, tant el nombre màxim de files com el de columnes linealment independents és 3.

En particular, tenint en compte que els pivots anteriors són els corresponents a la primera, segona i quarta files inicials (perquè la tercera i la quarta fila han estat permutades), obtenim que la primera, segona i quarta files

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

són linealment independents en nombre màxim.

I de la mateixa forma, tenint en compte que els pivots obtinguts corresponen també a la primera, segona i quarta columnes de l'altra, es dedueix que la primera, segona i quarta columnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

són també linealment independents en nombre màxim.

Exercici 25

Analitzeu si la matriu següent és regular i, en cas negatiu, trobeu una submatriu regular d'ordre màxim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que les files i columnes de la matriu no són múltiples l'una de l'altra, tenim que

$$\operatorname{rang} A = 2$$

i la matriu és, doncs, regular.

Exercici 26

Analitzeu si les matrius següents són regulars i, en cas negatiu, trobeu una submatriu regular d'ordre màxim pel mètode de Gauss:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Triangulant la matriu, tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}_{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}_{F_3 \sim 5F_3 - 2F_2} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que

$$\operatorname{rang} A = 3\,,$$

es dedueix que la matriu és regular.

(b) Triangulant la matriu, tenim que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{F_2 \sim 3F_2 - 5F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 + 2F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}_{\substack{F_3 \sim F_3 + F_2 \\ F_4 \sim F_4 + F_2}} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que

$$\operatorname{rang} A \neq 3\,,$$

es edueix que la matriu no és regular.

I com que els pivots corresponen a les tres primeres files i a la primera, segona i quarta columnes de la matriu original, tenim que una submatriu regular és

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 27

Resoleu l'equació lineal

$$x - 2y + 3z = -2\,.$$

Solució

La solució d'una sola equació lineal s'obté aïllant una de les incògnites:

$$x = -2 + 2y - 3z\,.$$

Exercici 28

Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents pel mètode de Gauss:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=2\\ 2x-y+3z&=0\\ x+2y&=-1\\ 3x-5y+z&=-2 \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} x+2y-3z&=-2\\ 3x+z&=0\\ 2x-y+2z&=3 \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(c)}\quad \left.\begin{aligned} 2x-y+3z&=4\\ x+2y-2z&=-2\\ 4x+3y-z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

(a) Considerem la matriu i la matriu ampliada i triangulem–les fent transformacions elementals per files:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-2F_1\\ F_3\sim F_3-F_1\\ F_4\sim F_4-3F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -4\\ 0 & 4 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right)_{\substack{F_3\sim 3F_3-4F_2\\ F_4\sim 3F_4-F_2}}.$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & -7 & -20 \end{array}\right)_{F_4\sim F_4-F_3} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right)$$

En conseqüència, és incompatible ja que

$$\operatorname{rang} A = 3 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{rang}(A|B) = 4\,.$$

(b) Considerem la matriu i la matriu ampliada i triangulem–les fent transformacions elementals per files:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-3F_1\\ F_3\sim F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & -6 & 10 & 6\\ 0 & -5 & 8 & 7 \end{array}\right)_{F_3\sim 6F_3-5F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & -6 & 10 & 6\\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right).$$

En conseqüència, és compatible determinat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 3\,.$$

I llavors de la tercera equació es té que $z=-6$ que, substituint a la segona, queda

$$-6y + 10\cdot(-6) = 6\,,$$

d'on s'obté que $y=-11$. I llavors, substituint aquest valor a la primera, tenim

$$x + 2\cdot(-11) - 3\cdot(-6) = -2\,,$$

que dona $x=2$ i, en definitiva,

$$\left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=-11\\ z&=-6 \end{aligned}\right\}.$$

(c) Triangulant la matriu i la matriu ampliada del sistema fent transformacions elementals per files, tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 2F_2-F_1 \\ F_3\sim F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \end{array}\right) \underset{F_3\sim F_3-F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En conseqüència, és compatible indeterminat amb $3-2=1$ grau de llibertat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2\,.$$

I la solució general s'obté posant dues de les incògnites en funció de la tercera. En aquest cas, de

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -8 \end{aligned}\right\},$$

a partir de la segona equació es té que

$$y = \frac{7z-8}{5}$$

que, substituint a la primera, queda

$$2x - \frac{7z-8}{5} + 3z = 4$$

i es té, en definitiva, que

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-4z+6}{5} \\ y &= \frac{7z-8}{5} \end{aligned}\right\}.$$

Exercici 29

Resoleu l'equació lineal homogènia

$$-3x + 2y - z = 0\,.$$

Solució

La solució d'una sola equació lineal homogènia s'obté aïllant una de les incògnites:

$$z = -3x + 2y\,.$$

Exercici 30

Resoleu els sistemes d'equacions lineals homogenis següents pel mètode de Gauss:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x + 5y + 4z &= 0 \\ x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 9y + 6z &= 0 \end{aligned}\right\};\qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 3x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x - 5y - 6z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

(a) Triangulem la matriu d'aquest sistema d'equacions, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-F_1\\ F_3\sim 3F_3-F_1\\ F_4\sim 3F_4-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & 0 \\ 0 & 17 & 14 & 0 \end{array}\right).$$

En aquesta matriu, el segon coeficient de la diagonal principal és 0. Aleshores, per continuar triangulant la matriu hem de permutar dues files de manera que el coeficient que ocupi aquest lloc sigui no nul:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 14 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim 17F_3+2F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -210 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_4\sim 105F_4+F_3} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En conseqüència, és compatible determinat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 3$$

i, per tant, l'única solució és la trivial:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

(b) Triangulant la matriu del sistema, tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2-3F_1\\ F_3\sim -F_3+2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En conseqüència, és compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2\,.$$

I per a la solució general, a partir de la segona equació del darrer sistema, es té que

$$y = \frac{2z}{7}$$

que, substituint a la primera, queda

$$2x + \frac{2z}{7} - 4z = 0$$

i obtenim, en definitiva,

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{13z}{7} \\ y = \dfrac{2z}{7} \end{array}\right\}.$$

Exercici 31

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

trobeu una relació de dependència entre les seves files.

Solució

Hem de trobar coeficients t_1, t_2, t_3 i t_4 tals que

$$t_1F_1+t_2F_2+t_3F_3+t_4F_4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

és a dir,

$$t_1\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}+t_4\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

que equival al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned}-2t_1+2t_2-t_3-3t_4&=0\\ -3t_1+2t_2-2t_3+t_4&=0\\ 2t_1-2t_2+t_3-2t_4&=0\end{aligned}\right\}.$$

Tenim, doncs,

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-2 & 2 & -1 & 3 & 0\\ -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2-3F_1\\ F_3\sim F_3+F_1}}\simeq\left(\begin{array}{cccc|c}-2 & 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right),$$

que té solució

$$t_1=2t_2\,,\qquad t_3=-2t_2\qquad \text{i}\qquad t_4=0\,.$$

I donant el valor 1 al paràmetre t_2, obtenim la relació de dependència lineal

$$2\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$2F_1+F_2-2F_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercici 32

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 4 & -5\\ -1 & -3 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

expresseu la segona columna com a combinació lineal de les altres tres.

Solució

Hem de trobar coeficients t_1, t_2 i t_3 tals que

$$t_1C_1+t_2C_3+t_3C_4=C_2\,,$$

és a dir,

$$t_1\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}-5\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\3\end{pmatrix},$$

que equival al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned}-3t_1+4t_2-5t_3&=-5\\-t_1+t_2-2t_3&=-3\\2t_1-2t_2+3t_3&=3\end{aligned}\right\}.$$

Tenim, doncs,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3&4&-5&-5\\-1&1&-2&-3\\2&-2&3&3\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 3F_2-F_1\\F_3\sim 3F_3+2F_1}}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}-3&4&-5&-5\\0&-1&-1&-4\\0&2&-1&-1\end{array}\right)_{F_3\sim F_3+2F_2}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}-3&4&-5&-5\\0&-1&-1&-4\\0&0&-3&-9\end{array}\right),$$

que té solució

$$t_1=-2,\qquad t_2=1\qquad \text{i}\qquad t_3=3\,.$$

Per tant, tenmim que

$$\begin{pmatrix}-5\\-3\\3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-5\\-2\\3\end{pmatrix}$$

o, el que és el marteix,

$$C_2=-2C_1+C_3+3C_4\,.$$

Exercici 33

Trobeu la forma triangular reduïda de la matriu següent pel mètode de Gauss–Jordan:

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&3\\2&1&0\\-1&2&5\end{pmatrix}.$$

Solució

Tenim que

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&3\\2&1&0\\-1&2&5\end{pmatrix}_{\substack{F_2\sim 3F_2-F_1\\F_3\sim 3F_3-2F_1\\F_4\sim F_4+3F_1}}\simeq\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&5&10\\0&1&2\\0&7&14\end{pmatrix}_{\substack{F_1\sim 5F_1-F_2\\F_3\sim 5F_3-F_2\\F_4\sim 5F_4-7F_2}}\simeq\begin{pmatrix}15&0&-15\\0&5&10\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercici 34

Resoleu simultàniament, pel mètode de Gauss–Jordan, els sistemes d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned}2x+y+3z&=2\\x-3y+z&=1\\5x-8y+6z&=-2\end{aligned}\right\}\qquad\text{i}\qquad\left.\begin{aligned}2x+y+3z&=1\\x-3y+z&=-2\\5x-8y+6z&=-5\end{aligned}\right\}.$$

Solució

Triangulant la matriu conjunta d'aquests dos sistemes lineals, tenim:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 6 & -2 & -5 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - 5F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -21 & -3 & -14 & -15 \end{array}\right)_{\substack{F_1 \sim 7F_1 + F_2 \\ F_3 \sim F_3 - 3F_2}} .$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|rr} 14 & 0 & 20 & 14 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant, el primer sistema és incompatible ja que

$$\operatorname{rang} A = 2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{rang}(A|B) = 3 .$$

I en el segon es té que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2$$

i, per tant, és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. I la seva solució general és, doncs,

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-10z + 1}{7} \\ y = \dfrac{-z + 5}{7} \end{array}\right\} .$$

Exercici 35

Trobeu la inversa de les matrius següents pel mètode de Gauss–Jordan:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Per calcular la inversa de la matriu A hem d'aplicar el mètode de Gauss–Jordan a la matriu $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1 \sim 3F_1 + 7F_2 \\ F_3 \sim F_3 - F_2}} .$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 0 & 2 & -18 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

I aleshores, com que

$$\operatorname{rang} A \neq 3 ,$$

es dedueix que A no és regular i, per tant, tampoc no té inversa.

(b) Per calcular la inversa de la matriu B hem de aplicar el mètode de Gauss–Jordan a la matriu $(B|I)$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-F_1 \\ F_3\sim F_3-F_1 \\ F_4\sim F_4-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2\leftrightarrow F_3}$$

En particular, el rang de la matriu és 4 i, en conseqüència, és regular. I continuant, tenim:

$$\simeq \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1\sim 2F_1+F_2 \\ F_4\sim F_4-F_2}} \simeq \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1\sim F_1+F_3 \\ F_4\sim F_4-F_3}}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1\sim 2F_1+F_4 \\ F_2\sim 2F_2+F_4 \\ F_3\sim 2F_3+F_4}} \simeq \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Per tant, la inversa de B és

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Capítol 2

Determinants

2.1 Determinants

Exercici 1

Calculeu el determinant d'ordre 1

$$\left| -4 \right| .$$

Solució

Els determinants d'ordre 1 són, senzillament, els elements:

$$\left| -4 \right| = -4 .$$

Exercici 2

Calculeu el determinant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} .$$

Solució

Els determinants d'ordre 2 són el producte dels elements de la diagonal principal menys el producte dels elements de la diagonal secundària:

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -4 \cdot 7 - 8 \cdot (-5) = -28 + 40 = 12 .$$

Exercici 3

Calculeu el determinant d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} .$$

Solució

Els determinants d'ordre 3 es poden calcular fent servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 8 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 8\cdot(-1)\cdot(-5) - (-5)\cdot 7\cdot 2 - (-2)\cdot(-1)\cdot 3 - 4\cdot 8\cdot 8$$

$$= 168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0\,.$$

Exercici 4

Calculeu el determinant d'ordre 4

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

posant zeros en alguna fila o columna i desenvolupant després per aquesta mateixa fila o columna.

Solució

Observem que la segona fila del primer determinant té dos zeros. Per tant, si fem una transformació elemental per columnes podem aconseguir que n'hi hagi un altre:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}_{C_1 \sim 2C_1 - 5C_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -11 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 23 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-2)\begin{vmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 23 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-176 + 46 + 4 + 184 + 11 + 16) = -85\,.$$

Exercici 5

Calculeu el determinant d'ordre 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

pel mètode de Gauss.

Solució

Posant zeros per sota dels pivots de cada columna, tenint en compte que si multipliquem una fila per un escalar no nul l'hem de treure també aquest a fora dividint, tenim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{F_2\sim 2F_2-5F_1 \\ F_3\sim F_3-3F_1 \\ F_4\sim F_4-2F_1}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{F_3\sim 4F_3-F_2 \\ F_4\sim 4F_4-F_2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{vmatrix}_{F_4\sim 5F_4+11F_3} = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2\cdot(-12)\cdot(-5)\cdot 52}{160} = 39\,.$$

Exercici 6

Calculeu el determinant de la matriu quadrada d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

mitjançant la regla de Laplace.

Solució

Si desenvolupem pels coeficients de la tercera fila, tenim que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\cdot(-46) - (-3)\cdot(-58) + 3\cdot 2 - 2\cdot(-8) = -14\,.$$

Exercici 7

Calculeu el determinant de la matriu

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que el determinant és d'ordre 3, tenim que

$$\det A = \left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (0 - 12 + 2 - 0 + 12 - 4) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}\,.$$

Exercici 8

Analitzeu si les matrius següents són directes, inverses o singulars:

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Calculem el determinant fent servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -56 + 3 + 0 + 4 - 0 + 49 = 0\,.$$

I com que el determinant és 0, la matriu és singular.

(b) Calculem el determinant fent servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 20 + 0 - 1 - 0 - 0 = -15 < 0\,.$$

I com que el determinant és estrictament negatiu, la matriu és inversa.

(c) Calculem el determinant fent servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 20 + 16 - 1 - 40 + 48 = 9 > 0\,.$$

I com que el determinant és estrictament positiu, la matriu és directa.

Exercici 9

Determineu si les matrius següents són ortogonals i, en cas afirmatiu, si són directes o inverses:

$$\text{(a)}\quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) La matriu A és ortogonal per ser del tipus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

amb

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1\,.$$

I és directa per ser exactament del primer tipus ja que, en aquest cas, es té que

$$\det A = a^2 + b^2\,,$$

és a dir, 1.

(b) Com que

$$B^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriu B no és ortogonal.

(c) Com que

$$C^tC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriu C sí és ortogonal.

I com que, a més,

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\,,$$

és inversa.

2.2 Menors i adjunta

Exercici 10

Calculeu els menors que s'obtenen en orlar el menor format per les dues darreres files i columnes de la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que el menor format per les dues darreres files i columnes és el menor d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix},$$

els menors d'ordre 3 que s'obtenen orlant el menor anterior amb la primera fila i la primera i segona columna respectivament són

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 18 - 0 - 6 + 4 = -21$$

i

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 + 12 + 8 = 22\,.$$

Exercici 11

Calculeu el rang i determineu files i columnes linealment independents en nombre màxim de la matriu següent pel mètode dels menors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Solució

Evidentment, les columnes de la matriu no són totes múltiples d'una mateixa columna. Per tant, el rang com a mínim és 2.

En aquest cas, no podem agafar el menor format per les dues primeres files i columnes perquè és zero. Però, en canvi, el menor format per les files primera i segona i les columnes segona i tercera

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

sí és un menor d'ordre 2 no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,.$$

Si afegim la tercera fila i la primera columna

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \downarrow & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \end{array}$$

tenim

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si afegim la tercera fila i la quarta columna

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & & \downarrow & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

queda

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

I si afegim la tercera fila i la cinquena columna

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

obtenim

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per tant, les tres primeres files són linealment dependents. I si afegim ara la quarta fila i la primera columna

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \downarrow & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

s’obté

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si afegim la quarta fila i la quarta columna

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & & \downarrow & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

es té

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

I si afegim la quarta fila i la cinquena columna

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & & \downarrow \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

el resultat és

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per tant, la primera, la segona i la quarta files són també linealment dependents. En definitiva, el rang és 2 i el nombre màxim de files i columnes linealment independents és també 2.

I tenint en compte que el menor no nul d'ordre màxim obtingut correspon a la primera i segona files, es dedueix que la primera i la segona files per exemple

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

són linealment independents en nombre màxim.

I com que el menor no nul d'ordre màxim obtingut correspon també a la segona i tercera columnes, es dedueix que la segona i la tercera columnes per exemple

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

són linealment independents en nombre màxim.

Exercici 12

Calculeu el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2-5a-10 & a^2-5a-14 & a^2-3a-8 \\ -2a-4 & -2a-4 & -a-2 \\ -a^2+3a+8 & -a^2+3a+10 & -a^2+2a+7 \end{pmatrix}$$

en funció del paràmetre a.

Solució

El que farem és calcular el determinant d'aquesta matriu i analitzar quan s'anu"la:

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{matrix} a^2-5a-10 & a^2-5a-14 & a^2-3a-8 \\ -2a-4 & -2a-4 & -a-2 \\ -a^2+3a+8 & -a^2+3a+10 & -a^2+2a+7 \end{matrix}\right|_{\substack{C_1\sim C_1-2C_3\\ C_2\sim C_2-2C_3}} = \\
&\left|\begin{matrix} -a^2+a+6 & -a^2+a+2 & a^2-3a-8 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ a^2-a-6 & a^2-a-4 & -a^2+2a+7 \end{matrix}\right| = \\
&-(-a-2)\cdot\left|\begin{matrix} -a^2+a+6 & -a^2+a+2 \\ a^2-a-6 & a^2-a-4 \end{matrix}\right|_{F_2\sim F_1+F_2} = \\
&(a+2)\cdot\left|\begin{matrix} -a^2+a+6 & -a^2+a+2 \\ 0 & -2 \end{matrix}\right| = \\
&-2(a+2)(-a^2+a+6) = 2(a+2)^2(a-3)\,.
\end{aligned}$$

Aleshores, és clar que aquest determinat s'anu"la quan

$$a=-2 \qquad \text{o} \qquad a=3\,.$$

En el primer cas, substituint a per -2 la matriu queda

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que té rang 1 per tenir totes les files i columnes proporcionals.

En el segon, substituint ara a pe 3 s'obté la matriu

$$\begin{pmatrix} -16 & -20 & -8 \\ -10 & -10 & -5 \\ 8 & 10 & 4 \end{pmatrix},$$

que té rang 2 perquè no pot ser 1 per no tenir totes les files i columnes proporcionals ni 3 per anu"lar-se el determinant de la matriu.

I, finalment, si $a\neq -2$ i $a\neq 3$ es té que el rang és 3 per no anu"lar-se el determinant de la matriu.

Exercici 13

Analitzeu si les matrius següents són regulars i, en cas negatiu, determineu una submatriu regular d'ordre màxim pel mètode dels menors:

$$\text{(a)}\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Com que en cas que la matriu no sigui regular ens interessarà trobar un menor no nul d'ordre màxim, convé calcular el determinant pel mètode de Gauss:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{\substack{F_1 \sim F_2 \\ F_2 \sim F_1}} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{F_3 \sim F_3 + 2F_1} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0\,.$$

Per tant, la matriu A sí és regular.

(b) Com que en cas que la matriu no sigui regular ens interessarà trobar un menor no nul d'ordre màxim, convé calcular el determinant pel mètode de Gauss:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \end{vmatrix}_{\substack{F_2 \sim 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - 4F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 - F_1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 16 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & -20 & -32 & -64 \end{vmatrix}_{\substack{F_3 \sim F_3 + F_2 \\ F_4 \sim F_4 + 4F_2}} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per tant, la matriu B no és regular. I com que el menor format per les tres primeres files i la primera, la segona i la quarta columnes és no nul, una submatriu regular d'ordre màxim és, doncs,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 14

Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents pel mètode de Cramer:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{aligned} 5x - 6y + z &= 4 \\ 3x - 5y - 2z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(c)} \quad \left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 3x - 5y + 5z &= 3 \\ 5x - 8y + 6z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

(a) Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Llavors, com que la matriu dels coeficients de les incògnites té un menor d'ordre 2 no nul

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

i el seu determinant és

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

el rang de la matriu del sistema és 2. I afegint la tercera fila i la columna de termes independents tenim

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -28 \neq 0\,.$$

Per tant, el sistema és incompatible ja que

$$\operatorname{rang} A = 2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{rang}(A|B) = 3\,.$$

(b) Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

En aquest cas, el menor format per les dues primeres files i columnes és no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \neq 0\,.$$

I l'únic menor d'ordre 3 de la matriu del sistema és també no nul

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

i, en conseqüència, aquest sistema és de Cramer i, en particular, compatible determinat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 3\,.$$

Per tant, la seva solució ve donada per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3\,; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{1} = -2\,; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

(c) Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

En aquest cas, el menor d'ordre 2 corresponent a les dues primeres files i columnes és no nul

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

I com que el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites és

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0\,,$$

el rang de la matriu del sistema és 2. Llavors, afegint la tercera fila i la columna de termes independents tenim

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat ja que

$$\text{rang}\, A = \text{rang}\,(A|B) = 2\,.$$

Llavors, d'una banda, com que les columnes del menor d'ordre 2 amb determinant no nul són la primera i la segona, agafem les incògnites x i y com a principals.

I d'altra banda, les files del menor d'ordre 2 no nul són la primera i la segona i, per tant, la tercera equació la podem eliminar:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -z + 2 \\ 3x - 5y &= -5z + 3 \end{aligned}\right\}.$$

I, finalment, resolem aquest sistema de 2 equacions amb 2 incògnites mitjançant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z+2 & -3 \\ -5z+3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-10z - 1}{-1} = 10z + 1\,;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z+2 \\ 3 & -5z+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-7z}{-1} = 7z\,.$$

Exercici 15

Resoleu els sistemes d'equacions lineals homogenis següents pel mètode de Cramer:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y - 5z &= 0 \\ -x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\};\qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 0 \\ 6x + 4y + 7z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

(a) Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

En primer lloc, el menor format per les dues primeres files i columnes és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0\,.$$

Per tant, el rang és almenys 2 i el menor d'ordre 3 obtingut afegint la primera columna i la tercera fila és

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0\,.$$

Per tant, com que el sistema és homogeni, el rang de la matriu ampliada és igual i tenim que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 3\,.$$

Això vol dir que el sistema és compatible determinat i, per ser homogeni, la solució ha de ser la trivial:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

(b) Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

En primer lloc, és clar que el menor format per les dues primeres files i columnes és 0. En canvi, l'obtingut considerant les files primera i segona i les columnes segona i tercera és no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,.$$

Per tant, el rang és almenys 2 i el menor d'ordre 3 obtingut afegint la primera columna i la tercera fila és

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Per tant, com que el sistema és homogeni, la matriu ampliada té el mateix rang i es té que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2\,.$$

En conseqüència, el sistema és compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

Llavors, d'una banda, com que les columnes d'un menor d'ordre 2 no nul són la segona i la tercera, agafem les incògnites y i z com a principals.

I, d'altra banda, suprimint les files tercera i quarta i passant els termes de la primera columna a la columna de termes independents, obtenim el sistema equivalent

$$\left.\begin{aligned} 2y + 5z &= -3x \\ 4y + 7z &= -6x \end{aligned}\right\}$$

que podem resoldre ja mitjançant la regla de Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3x & 5 \\ -6x & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9x}{-6} = -\frac{3x}{2}\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3x \\ 4 & -6x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-6} = 0\,.$$

Exercici 16

Resoleu el sistema d'equacions següent pel mètode de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} -2x+2y-z-2t &= -1 \\ x-2y+3z+4t &= 2 \\ -x+2z+2t &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

Matricialment, tenim:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

En aquest cas, el menor d'ordre 2 corresponent a les dues primeres files i columnes és no nul

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Llavors, com que els determinants de la matriu dels coeficients que s'obtenen orlant el menor anterior són tots nuls

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

obtenim que el rang de la matriu de coeficients és 2.

I com que el determinant que s'obté orlant el menor d'ordre 2 no nul anterior amb la columna de termes independents és també nul

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

obtenim que el rang de la matriu ampliada és també 2.

Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb $3-2=1$ grau de llibertat ja que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2\,.$$

Llavors, d'una banda, com que les columnes del menor d'ordre 2 amb determinant no nul són la primera i la segona, agafem les incògnites x i y com a principals.

I d'altra banda, les files del menor d'ordre 2 no nul són la primera i la segona i, per tant, la tercera equació la podem eliminar. I passant a l'altra banda les altres incògnites tenim:

$$\left.\begin{aligned} -2x+2y &= -1+z+2t \\ x-2y &= 2-3z-4t \end{aligned}\right\}.$$

I, finalment, resolem aquest sistema de 2 equacions amb 2 incògnites mitjançant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+z+2t & 2 \\ 2-3z-4t & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+4z+4t}{2} = -1+2z+2t\,;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1+z+2t \\ 1 & 2-3z-4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-3+5z+6t}{2}\,.$$

Exercici 17

Resoleu, en funció del paràmetre α, el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + y + z &= \alpha \\ x + \alpha y - z &= 1 \\ 3x + y + \alpha z &= 2 \end{aligned}\right\}\,.$$

Solució

En primer lloc, calculem per a quins valors de α el sistema és de Cramer, és a dir, per a quins valors de α el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites és no nul:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3 + 1 - 3\alpha + \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha - 2\,.$$

I podem calcular les solucions mitjançant la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

i la fórmula de l'equació de segon grau

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2\,; \\ -1\,. \end{cases}$$

Tenim, doncs, que el determinant és igual a

$$(\alpha+1)^2(\alpha-2)$$

i cal distingir, doncs, els casos

$$\alpha = -1\,, \qquad \alpha = 2 \qquad \text{i} \qquad \alpha \neq -1 \text{ i } 2\,.$$

(i) *Primer cas*: $\alpha = -1$.

En aquest ca, el sistema d'equacions és

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= -1 \\ x - y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

i, evidentment, la primera i la segona equacions són la mateixa.

Per tant, podem eliminar–ne una de les dues i el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} x - y &= z + 1 \\ 3x + y &= z + 2 \end{aligned}\right\},$$

que és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z+1 & -1 \\ z+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2z+3}{4};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 3 & z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2z-1}{4}.$$

(ii) *Segon cas*: $\alpha = 2$.

Ara el sistema d'equacions és

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

i la matriu dels coeficients de les incògnites

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

té un menor d'ordre 2 no nul

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

I per a calcular el rang de la matriu ampliada

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phantom{\boxed{2}} & \phantom{\boxed{1}} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

és suficient calcular el determinant que s'obté quan afegim la tercera fila i la quarta columna

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\,.$$

Aleshores, el rang de la matriu ampliada és 3 i el sistema és incompatible.

(iii) *Tercer cas*: $\alpha \neq -1$ i 2.

Ara el determinant és diferent de zero, el sistema és de Cramer i aplicant la regla de Cramer tenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha - 1}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha-1)}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{\alpha^2-\alpha-1}{(\alpha+1)(\alpha-2)}\,;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{-\alpha-1}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha-2)}\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{-\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{(\alpha+1)(1-\alpha)}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)} = \frac{1-\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-2)}\,.$$

Exercici 18

Trobeu els valors de λ per als quals el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} -3x + 2y - 2z &= \lambda x \\ -2x + y - 2z &= \lambda y \\ 2x - 2y + z &= \lambda z \end{aligned}\right\}$$

és compatible indeterminat.

Solució

En primer lloc, el sistema de l'enunciat es pot escriure en la forma

$$\left.\begin{aligned} (-3-\lambda)x + 2y - 2z &= 0 \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z &= 0 \\ 2x - 2y + (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned}\right\}\,.$$

I com que aquest sistema és homogeni, serà compatible indeterminant quan el rang de la matriu de coeficients sigui 2 o, el que és el mateix, quan s'anu"li el determinant d'aquesta matriu:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Aleshores, aplicant la regla de Sarrus, aquest determinant queda

$$(-3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)-8-8+4(1-\lambda)-4(-3-\lambda)+4(1-\lambda)=0$$

que, desenvolupant, es converteix en

$$-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1=0\,.$$

Aleshores, calculem les solucions mitjançant la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

i la fórmula de l'equació de segon grau

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{-2}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{-2}=\frac{2\pm 0}{-2}=\begin{cases}-1\,;\\ -1\,.\end{cases}$$

Per tant, en definitiva, obtenim que els valors de λ per als quals el sistema és compatible indeterminat són

$$\lambda=1 \qquad \text{i} \qquad \lambda=-1\,.$$

Exercici 19

Calculeu la matriu adjunta de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Els adjunts respectius de cada coeficient de la matriu són

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\,; \qquad -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\,; \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\,;$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0\,; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\,; \qquad -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2\,;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5\,; \qquad -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-7\,; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\,.$$

I, per tant, la matriu adjunta és

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 20

Trobeu la inversa de les matrius següents pel mètode de l'adjunta:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix};\qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) Per comprovar si la matriu A és regular, hem de comprovar si el seu determinant és no nul:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -56 + 3 + 0 + 4 - 0 + 49 = 0\,.$$

Per tant, no és regular i, en conseqüència, no té inversa.

(b) I pel que fa a la matriu B el seu determinant és

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 30 + 8 + 4 + 5 - 60 = -8 \neq 0$$

i, per tant, la matriu B és regular.

Llavors, els coeficients β_{ij} de la seva matriu adjunta són

$$\beta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10\,;\qquad \beta_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10\,;\qquad \beta_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6\,;$$

$$\beta_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -13\,;\qquad \beta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9\,;\qquad \beta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\,;$$

$$\beta_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17\,;\qquad \beta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13\,;\qquad \beta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11\,.$$

i, en conseqüència, la inversa de la matriu B és, doncs,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\cdot\left(B^{ad}\right)^t = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -6 \\ -13 & 9 & 7 \\ 17 & -13 & -11 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & 13 & -17 \\ 10 & -9 & 13 \\ 6 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercici 21

Resoleu simultàniament, pel mètode de l'adjunta, els sistemes d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 2 \\ x - 3y + z &= 1 \\ 6x - 8y + 5z &= -2 \end{aligned}\right\}\qquad \text{i}\qquad \left.\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 1 \\ x - 3y + z &= -2 \\ 6x - 8y + 5z &= -5 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

Els dos sistemes anteriors es poden escriure en forma matricial simplificada

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & -8 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

En primer lloc, és clar que el rang de la matriu del sistema és 2 ja que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

i

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

D'altra banda, pel que fa a la matriu ampliada del primer sistema, com que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0\,,$$

el seu rang és 3 i el sistema és, per tant, incompatible.

I respecte de la matriu ampliada del segon sistema, com que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 6 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0\,,$$

el seu rang és 2 i, per tant, el sistema és compatible indeterminat. Llavors, podem prescindir de la darrera equació i passar els termes en z a l'altre costat i tenim:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 1 - 2z \\ x - 3y &= -2 - z \end{aligned}\right\}\,,$$

o sigui,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -2 - z \end{pmatrix}.$$

Llavors, aïllant la matriu incògnita passant la inversa de la matriu d'aquest sistema a l'altre costat, queda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -2 - z \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -2 - z \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 + 7z \\ -7 - z \end{pmatrix},$$

del que es dedueix que la solució del segon sistema lineal és

$$x = \frac{1 - 7z}{10}\,; \qquad y = \frac{7 + z}{10}\,.$$

Exercici 22

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu X tal que $AXB = C$.

Solució

És immediat que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{i} \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

per tant, les matrius A i B són regulars. Aleshores, podem aïllar la X de la forma següent:

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 7 & -13 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 & -13 \\ -4 & -7 & 5 \\ -25 & -38 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercici 23

Es consideren les matrius

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analitzeu, en cada cas, si la matriu A és regular pel mètode dels menors i, en cas afirmatiu, resoleu les equacions matricials $AX = B$ pel mètode de l'adjunta.

Solució

(a) Com que es té que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

es dedueix que la matriu A no és regular.

(b) Com que es té que

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,,$$

es dedueix que la matriu A sí és regular.

Per tant, tenim que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 24

Es consideren les matrius

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Analitzeu en cada cas si la matriu A és regular pel mètode dels menors i, en cas afirmatiu, resoleu les equacions matricials $XA = B$ pel mètode de l'adjunta.

Solució

(a) Com que es té que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 6 - 16 + 36 + 24 - 5 = 0\,,$$

es dedueix que la matriu A no és regular.

(b) Com que es té que

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0\,,$$

es dedueix que la matriu A sí és regular.

Per tant, tenim que

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Capítol 3

Vectors al pla i a l'espai

3.1 El pla i l'espai vectorial

Exercici 1

Calculeu la suma dels vectors $(1, -3, 2)$ i $(0, 1, 3)$.

Solució

La suma s'obté sumant component a component:

$$(1, -3, 2) + (0, 1, 3) = (1, -2, 5)\,.$$

Exercici 2

Calculeu el producte de l'escalar -3 i el vector $(-1, 2, 3)$.

Solució

El producte s'obté multiplicant cada component per l'escalar:

$$-3(-1, 2, 3) = (3, -6, -9)\,.$$

Exercici 3

Calculeu la combinació lineal dels vectors

$$(-1, 2, -2)\,, \qquad (3, -2, 1) \qquad \text{i} \qquad (-5, 2, 1)$$

amb els escalars 3, 2 i -1, respectivament.

Solució

Per definició, només cal fer el càlcul

$$3(-1, 2, -2) + 2(3, -2, 1) - 1(-5, 2, 1) = (8, 0, -5)\,.$$

Exercici 4

Determineu si el vector $(1,-1,1)$ és combinació lineal dels vectors del sistema

$$\{(2,-1,3),(-3,1,2),(7,-3,4)\}.$$

Solució

De la condició

$$\alpha(2,-1,3)+\beta(-3,1,2)+\gamma(7,-3,4)=(1,-1,1),$$

s'obté el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha-3\beta+7\gamma &= 1 \\ -\alpha+\beta-3\gamma &= -1 \\ 3\alpha+2\beta+4\gamma &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, triangulant, tenim:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2+F_1 \\ F_3\sim 2F_3-3F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 13 & -13 & -1 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+13F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right).$$

I llavors, com que el rang de la matriu i el de l'ampliada són diferents, el sistema és incompatible i el vector

$$(1,-1,1)$$

no és combinació lineal dels vectors $(2,-1,3)$, $(-3,1,2)$ i $(7,-3,4)$.

Exercici 5

Analitzeu si els vectors de V_3

$$(4,0,-5), \qquad (2,-1,-3) \qquad \text{i} \qquad (0,2,1)$$

són linealment dependents i, en cas afirmatiu, determineu una relació de dependència lineal entre ells.

Solució

Per trobar una relació de dependència lineal entre aquests vectors, de la condició

$$\alpha(4,0,-5)+\beta(2,-1,-3)+\gamma(0,2,1)=(0,0,0)$$

s'obté el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha+2\beta &= 0 \\ -\beta+2\gamma &= 0 \\ -5\alpha-3\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, triangulant, tenim:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim 4F_3+5F_1} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-2F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Per tant, en ser compatible indeterminat, es dedueix que els vectors són linealment dependents.

Llavors, resolent el sistema lineal obtingut s'obté que

$$\alpha = -\gamma \qquad \text{i} \qquad \beta = 2\gamma\,.$$

I prenent $\gamma = 1$ per exemple, es dedueix que una possible relació de dependència lineal entre els vectors és

$$-1(4,0,-5) + 2(2,-1,-3) + 1(0,2,1) = (0,0,0)$$

Exercici 6

Determineu el rang del sistema de vectors

$$\{(-1,4,2),(3,0,-1),(-1,2,1)\}\,.$$

Solució

Com que el rang d'un sistema de vectors és igual al de la seva matriu, hem de calcular el rang d'aquesta. Tenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{F_2 \sim F_2+4F_1 \\ F_3 \sim F_3+2F_1}} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{F_3 \sim 12F_3-5F_2} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que totes tres files són no competament nu"les, el rang dels vectors anteriors és 3.

Exercici 7

Comproveu que el conjunt definit per generadors

$$V = \langle (3,5,1),(1,3,3),(3,2,-5),(2,3,0)\rangle$$

és un pla vectorial de V_3 i determineu una base i una equació implícita minimal seva.

Solució

Si (x,y,z) és un vector genèric, s'haurà de complir la condició

$$\alpha(3,5,1) + \beta(1,3,3) + \gamma(3,2,-5) + \delta(2,3,0) = (x,y,z)\,,$$

que dona lloc al sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= x \\ 5\alpha + 3\beta + 2\gamma + 3\delta &= y \\ \alpha + 3\beta - 5\gamma &= z \end{aligned}\right\}.$$

Aleshores, triangulant, tenim:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 & x \\ 5 & 3 & 2 & 3 & y \\ 1 & 3 & -5 & 0 & z \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 3F_2-5F_1 \\ F_3 \sim 3F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 4 & -9 & -1 & 3y-5x \\ 0 & 8 & -18 & -2 & 3z-x \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3-2F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 4 & -9 & -1 & 3y-5x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9x-6y+3z \end{array}\right).$$

Per tant, el rang de la matriu de l'esquerra és 2 i es té que és un pla vectorial.

A més, com que els pivots de la matriu triangulada estan situats a les columnes primera i segona, s'obté la base

$$\{(3,5,1),(1,3,3)\}.$$

I, d'altra banda, l'equació implícita minimal s'obté imposant que sigui compatible, que passa quan $9x-6y+3z=0$ o, el que és el mateix,

$$3x-2y+z=0.$$

Exercici 8

Comproveu que el conjunt definit per equacions implícites

$$V:\ \left.\begin{aligned} 2x-y+5z&=0\\ 4x-2y+7z&=0\\ 2x-y+z&=0 \end{aligned}\right\}$$

és una recta vectorial de V_3 i trobeu–ne unes equacions implícites minimals i una base.

Solució

Hem de resoldre el sistema lineal de les equacions implícites de V. Triangulant, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 0\\ 4 & -2 & 7 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-2F_1\\ F_3\sim F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim 3F_3-4F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Per tant, el rang és 2 i, en conseqüència, es tracta d'una recta vectorial.

Llavors, suprimint la darrera equació implícita, s'obtenen les equacions implícites minimals

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+5z&=0\\ 4x-2y+7z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

I com que la solució general d'aquest sistema és $y=2x$ i $z=0$, es té que els vectors de V són els de la forma

$$(x,y,z)=(x,2x,0)=x(1,2,0)$$

i, en conseqüència, una base seva és

$$\{(1,2,0)\}.$$

Exercici 9

Determineu quins dels sistemes següents són base de V_3 i, en cas afirmatiu, trobeu la seva orientació:

(a) $\{(-2,3,-1),(1,2,5),(-3,2,9)\}$;

(b) $\{(-1,1,-1),(8,-7,6),(8,-3,-2)\}$;

(c) $\{(-1,5,-4),(5,0,1),(2,-2,3)\}$.

Solució

(a) Com que

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -36 - 2 - 45 - 6 + 20 - 27 = -96 < 0\,,$$

és una base negativa.

(b) Com que

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 24 + 48 - 56 - 18 + 16 = 0\,,$$

no és base.

(c) Com que

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 40 + 10 - 2 + 75 = 123 > 0\,,$$

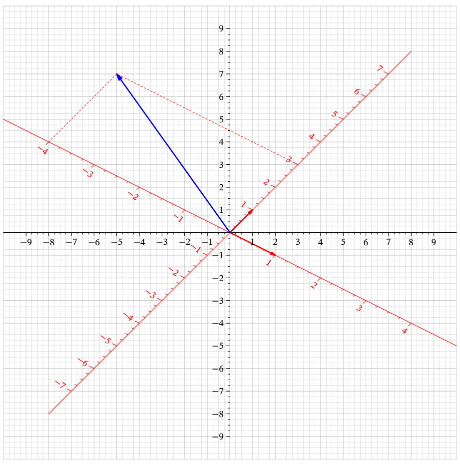
és una base positiva.

Exercici 10

Representeu gràficament el vector que en la base $\mathcal{B}' = \{(2,-1),(1,1)\}$ té components $(-4,3)$ –és a dir, $\vec{u} = (-4,3)_{\mathcal{B}'}$– i trobeu les seves components en la base canònica.

Solució

El seu gràfic és



I les components del vector $\vec{u}$ en la base canònica són

$$-4(2,-1) + 3(1,1) = (-5,7)\,.$$

Exercici 11

Determineu el vector que té components $(1,-2,1)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(3,-1,1),(2,1,0),(-1,2,4)\}\,.$$

Solució

Hem de calcular la combinació lineal dels vectors anteriors amb els escalars de les components donades:

$$1(3,-1,1)-2(2,1,0)+1(-1,2,4)=(-2,-1,5)\,.$$

Exercici 12

Calculeu les components del vector $(-2,2,-10)$ en la base

$$\mathcal{B}'=\{(1,2,-1),(2,1,-2),(3,2,1)\}\,.$$

Solució

Per calcular les components del vector $(-2,2,-10)$ en aquesta base, hem de trobar x', y', z' tals que

$$(-2,2,-10)=x'(1,2,-1)+y'(2,1,-2)+z'(3,2,1)\,.$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -10 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-2F_1\\ F_3\sim F_3+F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right).$$

Llavors, és clar que la seva solució és $x'=3$, $y'=2$ i $z'=-3$ i, per tant, les components del vector $(-2,2,-10)$ en la base $\{(1,2,-1),(2,1,-2),(3,2,1)\}$ són

$$(3,2,-3)\,.$$

Exercici 13

Les equacions d'una recta de V_3 en la base canònica són

$$\left.\begin{aligned} x+3y-z&=0\\ -2x+y+3z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Calculeu la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}'=\{(1,1,1),(2,3,3),(1,2,0)\}$ a la base canònica i escriviu la corresponent fórmula del canvi de base.

(b) Determineu les equacions de la recta anterior en la base $\mathcal{B}'$.

Solució

(a) Com que la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}') & \xrightarrow{\quad C \quad} & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}_c) \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} \end{array}$$

és

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que la fórmula de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \qquad \left. \begin{aligned} x &= x' + 2y' + z' \\ y &= x' + 3y' + 2z' \\ z &= x' + 3y' \end{aligned} \right\} .$$

(b) Per calcular les equacions de la recta en la base $\mathcal{B}'$ necessitem tenir (x, y, z) en funció de (x', y', z'). Per tant, substituint les relacions de la fórmula de canvi de base anterior a les equacions de l'enunciat, obtenim

$$\left. \begin{aligned} (x' + 2y' + z') + 3(x' + 3y' + 2z') - (x' + 3y') = 0 \\ -2(x' + 2y' + z') + (x' + 3y' + 2z') + 3(x' + 3y') = 0 \end{aligned} \right\}$$

o, el que és el mateix,

$$\left. \begin{aligned} 3x' + 8y' + 7z' = 0 \\ x' + 4y' = 0 \end{aligned} \right\} .$$

Exercici 14

L'equació d'un pla de V_3 en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,1), (1,2,2), (-1,-1,0)\}$ és

$$x' - 2y' - 3z' = 0 .$$

(a) Calculeu la matriu de canvi de base de la base canònica a la base $\mathcal{B}'$ i escriviu la corresponent fórmula de canvi de base.

(b) Determineu l'equació del pla anterior en la base canònica.

Solució

(a) Com que la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}'$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{\quad C^{-1} \quad} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} \end{array}$$

és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la fórmula de canvi de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}'$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad \left. \begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z \\ y' &= -x + y \\ z' &= -y + z \end{aligned} \right\} .$$

(b) Per calcular l'equació del pla en la base canònica necessitem tenir (x', y', z') en funció de (x, y, z). Per tant, substituint les relacions de la fórmula de canvi de base anterior a l'equació del pla, obtenim

$$(2x - 2y + z) - 2(-x + y) - 3(-y + z) = 0$$

o bé

$$4x - y - 2z = 0\,.$$

Exercici 15

L'equació d'un pla de V_3 en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ és

$$2x' + y' - z' = 0\,.$$

(a) Calculeu la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}'' = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ a la base $\mathcal{B}'$ i escriviu la corresponent fórmula de canvi de base.

(b) Calculeu l'equació del pla anterior en la base $\mathcal{B}''$.

Solució

(a) Llavors, d'una banda, les matrius del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$ i de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}_c$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
\vec{x} \arrow[r, mapsto] & \vec{x}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'') \arrow[r, "D"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
\vec{x} \arrow[r, mapsto] & \vec{x}
\end{tikzcd}$$

són

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

respectivament. Llavors, la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'') \arrow[r, "D"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\
\vec{x} \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "P = C^{-1}D"'] & \vec{x} \arrow[r, mapsto] & \vec{x}
\end{tikzcd}$$

és

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la fórmula de canvi de base és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}; \qquad \left.\begin{aligned} x' &= x'' + 2y'' + z'' \\ y' &= x'' - y'' \\ z' &= -x'' + z'' \end{aligned}\right\}.$$

(b) Per calcular l'equació del pla en la base $\mathcal{B}''$ necessitem tenir (x', y', z') en funció de (x'', y'', z''). Per tant, substituint les relacions de la fórmula de canvi de base anterior a l'equació del pla, obtenim

$$2(x'' + 2y'' + z'') + (x'' - y'') - (-x'' + z'') = 0\,,$$

és a dir,

$$4x'' + 3y'' + z'' = 0\,.$$

Exercici 16

L'equació implícita del pla vectorial P és

$$x - 2y + 3z = 0\,.$$

Calculeu la seva equació en la base $\mathcal{B}' = \{(-2, 1, 1), (1, -1, 2), (-1, 1, -1)\}$.

Solució

La fórmula del canvi de base de la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (-1, -1, 0)\}$ a la base canònica és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

i l'equació del pla P (en la base canònica) es pot escriure com a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\,.$$

Aleshores, l'equació de P en la base $\mathcal{B}'$ serà

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

o, el que és el mateix,

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0\,,$$

que, canviant de signe, queda

$$x' - 9y' + 6z' = 0\,.$$

Exercici 17

Representeu la recta vectorial que en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-2, 1)\}$ té equació

$$2x' - 3y' = 0\,.$$

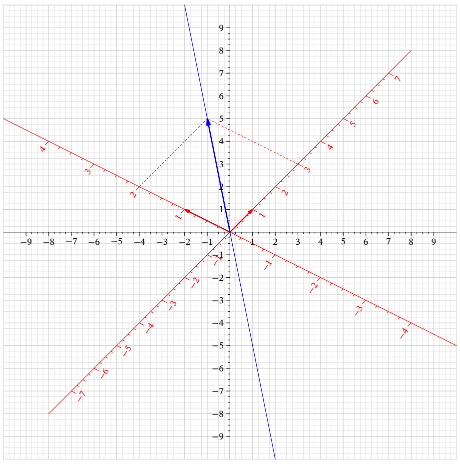
Quina és la seva equació en la base canònica?

Solució

El vector

$$\vec{u} = (3, 2)_{\mathcal{B}'} = 3(1, 1) + 2(-2, 1) = (-1, 5)$$

és un generador de la recta vectorial. Aleshores, la representació gràfica és



El canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica i l'equació de la recta en la base $\mathcal{B}'$ són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0\,.$$

Aleshores tenim

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\,,$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

o bé

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\,.$$

I aleshores, multiplicant per 3, l'equació de la recta vectorial en la base canònica queda

$$5x + y = 0\,.$$

Exercici 18

Siguin

$$\mathcal{B}' = \{(-1,-2,2),(-1,2,-1),(1,1,-1)\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}'' = \{(1,-2,1),(-3,-1,2),(-1,-1,1)\}$$

dues bases de V_3. Trobeu l'expressió del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$.

Solució

Les expressions del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica i de la base $\mathcal{B}''$ a la base canònica són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Aleshores tenim que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

i, si aïllem (x'', y'', z'') en funció de $(x', y,' z')$,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Exercici 19

Trobeu una base $\mathcal{B}'$ sabent que les components dels vectors $(-1,-2,-1)$, $(3,3,2)$ i $(-2,-3,-2)$ en aquesta base són $(0,1,3)_{\mathcal{B}'}$, $(-1,-3,-7)_{\mathcal{B}'}$ i $(0,1,4)_{\mathcal{B}'}$.

Solució

L'expressió del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

on C és la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$.

Aleshores, tindrem que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de canvi de base C és

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

I, en definitiva, la base és

$$\mathcal{B}' = \{(-2,1,-1),(2,1,2),(-1,-1,-1)\}.$$

Exercici 20

Sigui P el pla vectorial generat pels vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ de components $(1,-1,2)$ i $(3,-1,-2)$ en una base $\mathcal{B}'$. Trobeu les equacions implícites de P en la base $\mathcal{B}'$.

Solució

Com que els conceptes involucrats no depenen del producte escalar, treballarem en la base $\mathcal{B}'$.

Triangulant la matriu d'aquests vectors en la base $\mathcal{B}'$ tenim:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x' \\ -1 & -1 & y' \\ 2 & -2 & z' \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2+F_1 \\ F_3 \sim F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x' \\ 0 & 2 & x'+y' \\ 0 & -8 & -2x'+z' \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_3+4F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x' \\ 0 & 2 & x'+y' \\ 0 & 0 & 2x'+4y'+z' \end{array}\right).$$

Per tant, obtenim que l'equació implícita del pla vectorial P en la base $\mathcal{B}'$ és

$$2x' + 4y' + z' = 0\,.$$

Exercici 21

Determineu una base del pla vectorial P de V_3 que en la base $\mathcal{B}' = \{(1,0,-2),(2,3,1),(1,1,0)\}$ té equació implícita

$$-2x' + 2y' + z' = 0\,.$$

Solució

Com que els conceptes involucrats no depenen del producte escalar, treballarem en la base $\mathcal{B}'$.

Aïllant per exemple z' de l'equació de l'enunciat, obtenim $z' = 2x' - 2y'$, d'on es té que

$$(x', y', z') = (x', y', 2x' - 2y') = x'(1,0,2) + y'(0,1,-2)\,.$$

Per tant, la base de P està formada pels vectors de components $(1,0,2)$ i $(0,1,-2)$ en la base $\mathcal{B}'$

$$1(1,0,-2) + 0(2,3,1) + 2(1,1,0) = (3,2,-2) \qquad \text{i} \qquad 0(1,0,-2) + 1(2,3,1) - 2(1,1,0) = (0,1,1)$$

i, en conseqüència, la base és $\{(3,2,-2),(0,1,1)\}$.

3.2 El pla i l'espai vectorial euclidià

Exercici 22

Calculeu el producte escalar dels vectors $(1,3,0)$ i $(2,1,-2)$.

Solució

El producte escalar és

$$(1,3,0)\cdot(2,1,-2) = 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 0\cdot(-2) = 5\,.$$

Exercici 23

Calculeu la norma del vector $(2,-3,6)$.

Solució

La norma és

$$\|(2,-3,6)\| = \sqrt{(2,-3,6)\cdot(2,-3,6)} = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{49} = 7\,.$$

Exercici 24

Calculeu l'angle que formen els vectors $(-1, 1, -2)$ i $(2, 1, 1)$.

Solució

L'angle és

$$\widehat{(-1, 1, -2)(2, 1, 1)} = \arccos \frac{(-1, 1, -2) \cdot (2, 1, 1)}{\|(-1, 1, -2)\| \|(2, 1, 1)\|} = \arccos \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \arccos -\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercici 25

Calculeu el producte vectorial dels vectors $(-1, 2, 2)$ i $(1, -1, 0)$.

Solució

Tenim que

$$(-1, 2, 2) \wedge (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -1).$$

Exercici 26

Determineu quins dels sistemes de vectors de V_3 següents són ortogonals i quins ortonormals:

(a) $\{(3, 1, 2), (-1, 2, 4), (4, -1, 3)\}$;

(b) $\{(1, -1, 1), (1, 2, 1), (-1, 0, 1)\}$;

(c) $\{\frac{1}{3}(2, 2, -1), \frac{1}{3}(2, -1, 2), \frac{1}{3}(-1, 2, 2)\}$.

Solució

(a) El sistema no és ortogonal (i, per tant, tampoc ortonormal), ja que

$$(3, 1, 2) \cdot (-1, 2, 4) = 7 \neq 0.$$

(b) El sistema és ortogonal però no ortonormal, ja que

$$(1, -1, 1) \cdot (1, 2, 1) = (1, -1, 1) \cdot (-1, 0, 1) = (1, 2, 1) \cdot (-1, 0, 1) = 0,$$

però

$$\|(1, -1, 1)\| = \sqrt{3} \neq 1.$$

(c) El sistema és ortonormal (i, per tant, també ortogonal), ja que

$$\frac{1}{3}(2, 2-1) \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2) = \frac{1}{3}(2, 2, -1) \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = \frac{1}{3}(2, -1, 2) \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = 0$$

i

$$\left\|\frac{1}{3}(2, 2, -1)\right\| = \left\|\frac{1}{3}(2, -1, 2)\right\| = \left\|\frac{1}{2}(-1, 2, 2)\right\| = 1.$$

Exercici 27

Determineu una base ortogonal i una base ortonormal de V_3 a partir del sistema de vectors linealment independent

$$\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1), (-1, 0, 0)\}.$$

Solució

Aplicant el mètode de Gram–Schmidt, tenim:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1\,' &= (2,1,0)\,;\\
\vec{v}_2\,' &= (-3,0,1) - \frac{(-3,0,1)\cdot(2,1,0)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}(2,1,0) = (-3,0,1) + \frac{6}{5}(2,1,0) = \frac{1}{5}(-3,6,5) \simeq (-3,6,5)\,;\\
\vec{v}_3\,' &= (-1,0,0) - \frac{(-1,0,0)\cdot(2,1,0)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}(2,1,0) - \frac{(-1,0,0)\cdot(-3,6,5)}{(-3,6,5)\cdot(-3,6,5)}(-3,6,5)\\
&= (-1,0,0) + \frac{2}{5}(2,1,0) - \frac{3}{70}(-3,6,5) = \frac{1}{70}(-5,10,-15) \simeq (-1,2,-3)\,.
\end{aligned}$$

Per tant, la base ortogonal és

$$\{(2,1,0),(-3,6,5),(-1,2,-3)\}\,.$$

I com que les normes d'aquests vectors són

$$\|(2,1,0)\| = \sqrt{5}\,, \qquad \|(-3,6,5)\| = \sqrt{70} \qquad \text{i} \qquad \|(-1,2,-3)\| = \sqrt{14}\,,$$

dividint per elles, obtenim la base ortonormal

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-3,6,5), \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)\right\}.$$

Exercici 28

Trobeu una base ortogonal i una base ortonormal del pla vectorial P de V_3 d'equació implícita

$$x - 2y - z = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, de l'equació implícita de l'enunciat es dedueix que

$$x = 2y + z$$

i, per tant, els vectors del pla vectorial P són els donats per

$$(x,y,z) = (2y+z,y,z) = y(2,1,0) + z(1,0,1)$$

i una base de P és, doncs,

$$\{(2,1,0),(1,0,1)\}\,.$$

Aleshores, aplicant la fórmula de Gram–Schmidt, obtenim

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1\,' &= (2,1,0)\,;\\
\vec{v}_2\,' &= (1,0,1) - \frac{(2,1,0)\cdot(1,0,1)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}(2,1,0) = (1,0,1) - \frac{2}{5}(2,1,0) = \frac{1}{5}(1,-2,5) \simeq (1,-2,5)\,.
\end{aligned}$$

En conseqüència, la base ortogonal és

$$\{(2,1,0),(1,-2,5)\}\,.$$

I com que les normes d'aquests vectors són

$$\|(2,1,0)\| = \sqrt{5} \qquad \text{i} \qquad \|(1,-2,5)\| = \sqrt{30}\,,$$

dividint per elles, obtenim la base ortonormal

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-2,5)\right\}.$$

Exercici 29

Calculeu una base i unes equacions implícites minimals de la recta perpendicular al pla vectorial P de V_3 generat pels vectors $(2,1,-1)$ i $(2,-1,1)$.

Solució

Imposant que un vector genèric (x,y,z) ha de ser ortogonal a aquests vectors, tenim

$$\left.\begin{aligned}(2,1,-1)\cdot(x,y,z) = 0\\ (2,-1,1)\cdot(x,y,z) = 0\end{aligned}\right\},$$

és a dir,

$$\left.\begin{aligned}2x + y - z = 0\\ 2x - y + z = 0\end{aligned}\right\},$$

que són minimals ja que no són proporcionals. I resolent aquest sistema, trobem una base de $P^\perp$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)_{F_2\sim F_1-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right).$$

I llavors, com que la seva solució general és $x = 0$ i $y = z$, obtenim que els vectors de P són els de la forma

$$(x,y,z) = (0,z,z) = z(0,1,1)$$

i una base de $P^\perp$ és, doncs,

$$\{(0,1,1)\}.$$

Exercici 30

Determineu una base i unes equacions implícites minimals de la recta perpendicullar al pla P de V_3 d'equació implícita

$$x - 2y + z = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, a partir de l'equació implícita de l'enunciat, es dedueix que una base de $P^\perp$ és

$$\{(1,-2,1)\}.$$

I llavors, de la condició

$$\alpha(1,-2,1) = (x,y,z)\,,$$

es té

$$\left(\begin{array}{r|c} 1 & x \\ -2 & y \\ 1 & z \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & 2x+y \\ 0 & -x+z \end{array}\right)$$

i s'obtenen les equacions implícites minimals de $P^{\perp}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -x+z=0 \end{array}\right\} .$$

Exercici 31

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(1,-2,1)$ respecte del pla vectorial

$$P = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle .$$

Solució

Cal resoldre el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Tenim llavors:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim 2F_2 + F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) .$$

Aleshores, la solució és $x' = \frac{1}{3}$ i $y' = -\frac{2}{3}$ i, per tant, la projecció ortogonal és

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{3}(1,0,-1) - \frac{2}{3}(0,1,1) = \frac{1}{3}(1,-2,-2);$$

i el simètric, doncs,

$$\vec{x}^{\,*} = 2\vec{x}\,' - \vec{x} = 2 \cdot \frac{1}{3}(1,-2,-2) - (1,-2,1) = \frac{1}{3}(-1,2,-5) .$$

Exercici 32

Trobeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(3,1,-4)$ respecte del pla vectorial P generat pels vectors $(1,2,-2)$ i $(2,4,5)$.

Solució

Com que la base de P és ortogonal, tenim que la projecció ortogonal del vector $\vec{x} = (3,1,-4)$ és

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= \frac{(3,1,-4)\cdot(1,2,-2)}{(1,2,-2)\cdot(1,2,-2)}(1,2,-2) + \frac{(3,1,-4)\cdot(2,4,5)}{(2,4,5)\cdot(2,4,5)}(2,4,5) \\ &= \frac{13}{9}(1,2,-2) - \frac{10}{45}(2,4,5) = (1,2,-4); \end{aligned}$$

i el simètric, doncs,

$$\vec{x}^* = 2\vec{x}' - \vec{x} = 2(1,2,-4) - (3,1,-4) = (-1,3,-4)\,.$$

Exercici 33

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(3,2,7)$ respecte del pla P d'equació implícita

$$2x - y + z = 0\,.$$

Solució

Com que

$$\dim\, P^\perp = 3 - 2 = 1 < 2 = \dim\, P\,,$$

és més fàcil calcular primer la projecció ortogonal $\vec{x}''$ sobre la recta perpendicular

$$P^\perp = \langle(2,-1,1)\rangle$$

i aplicar després que $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}''$.

Llavors, com que la recta vectorial té un sol generador, tenim que

$$\vec{x}'' = \frac{(3,2,7)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \frac{11}{6}(2,-1,1) = \frac{1}{6}(22,-11,11)$$

i, per tant,

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}'' = (3,2,7) - \frac{1}{6}(22,-11,11) = \frac{1}{6}(-4,23,31)$$

i

$$\vec{x}^* = 2\vec{x}' - \vec{x} = 2\cdot\frac{1}{6}(-4,23,31) - (3,2,7) = \frac{1}{3}(-13,17,10)\,.$$

Exercici 34

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(2,-2,3)$ respecte de la recta vectorial generada pel vector $(1,-1,1)$.

Solució

Com que la recta vectorial té un sol generador, tenim que la projecció ortogonal és

$$\vec{x}' = \frac{(2,-2,3)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(7,-7,7)$$

i, per tant, el simètric és

$$\vec{x}^* = 2\vec{x}' - \vec{x} = 2\cdot\frac{1}{3}(7,-7,7) - (2,-2,3) = \frac{1}{3}(8,-8,5)\,.$$

Exercici 35

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(-4,7,6)$ respecte de la recta vectorial R d'equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

En primer lloc, trobem el generador de la recta R a partir del sistema anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -\frac{1}{5}z$ i $y = \frac{8}{5}z$.

Per tant, agafant $z = 5$ per exemple, tenim que el generador de la recta és el vector $(-1, 8, 5)$ i, per tant, la projecció ortogonal és

$$\vec{x}\,' = \frac{(-4,7,6)\cdot(-1,8,5)}{(-1,8,5)\cdot(-1,8,5)}(-1,8,5) = \frac{90}{90}(-1,8,5) = (-1,8,5)\,.$$

I, finalment, es té que el simètric és el vector

$$\vec{x}^{\,*} = 2\vec{x}\,' - \vec{x} = 2\cdot(-1,8,5) - (-4,7,6) = (2,9,4)\,.$$

Exercici 36

Digueu quines de les bases de V_3 següents són ortogonals i quines ortonormals:

(a) $\{(-1,2,3),(1,0,-3),(2,1,-4)\}$;

(b) $\{\frac{1}{7}(2,3,6), \frac{1}{7}(-6,-2,3), \frac{1}{7}(3,-6,2)\}$;

(c) $\{(5,2,4),(0,-2,1),(-2,1,2)\}$.

Solució

(a) Com que es té, per exemple, que

$$(-1,2,3)\cdot(1,0,-3) = -10 \neq 0\,,$$

es dedueix que la base no és ortogonal i, per tant, tampoc ortonormal.

(b) Com que es verifica, d'una banda, que

$$\frac{1}{7}(2,3,6)\cdot\frac{1}{7}(-6,-2,3) = \frac{1}{7}(2,3,6)\cdot\frac{1}{7}(3,-6,2) = \frac{1}{7}(-6,-2,3)\cdot\frac{1}{7}(3,-6,2) = 0$$

i, d'una altra, que

$$\left\|\frac{1}{7}(2,3,6)\right\| = \left\|\frac{1}{7}(-6,-2,3)\right\| = \left\|\frac{1}{7}(3,-6,2)\right\| = \frac{1}{7}\cdot 7 = 1\,,$$

es dedueix que la base és ortonormal i, en particular, també ortogonal.

(c) Com que ara

$$(5,2,4)\cdot(0,-2,1) = (5,2,4)\cdot(-2,1,2 = (0,-2,1)\cdot(-2,1,2) = 0$$

però, en canvi,

$$\|(5,2,4)\| = \sqrt{45} \neq 1\,,$$

es dedueix que la base és ortogonal però no ortonormal.

Exercici 37

Calculeu les components del vector $(-1,3,1)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{3}(2,2,-1), \frac{1}{3}(2,-1,2), \frac{1}{3}(-1,2,2)\right\}.$$

Solució

Com que $\mathcal{B}'$ és ortonormal, les components s'obtenen multiplicant escalarment el vector donat pels vectors de la base:

$$\left((-1,3,1)\cdot\frac{1}{3}(2,2,-1), (-1,3,1)\cdot\frac{1}{3}(2,-1,2), (-1,3,1)\cdot\frac{1}{3}(-1,2,2)\right) = (1,-1,3).$$

Tenim, doncs, que

$$(-1,3,1) = (1,-1,3)_{\mathcal{B}'}.$$

Exercici 38

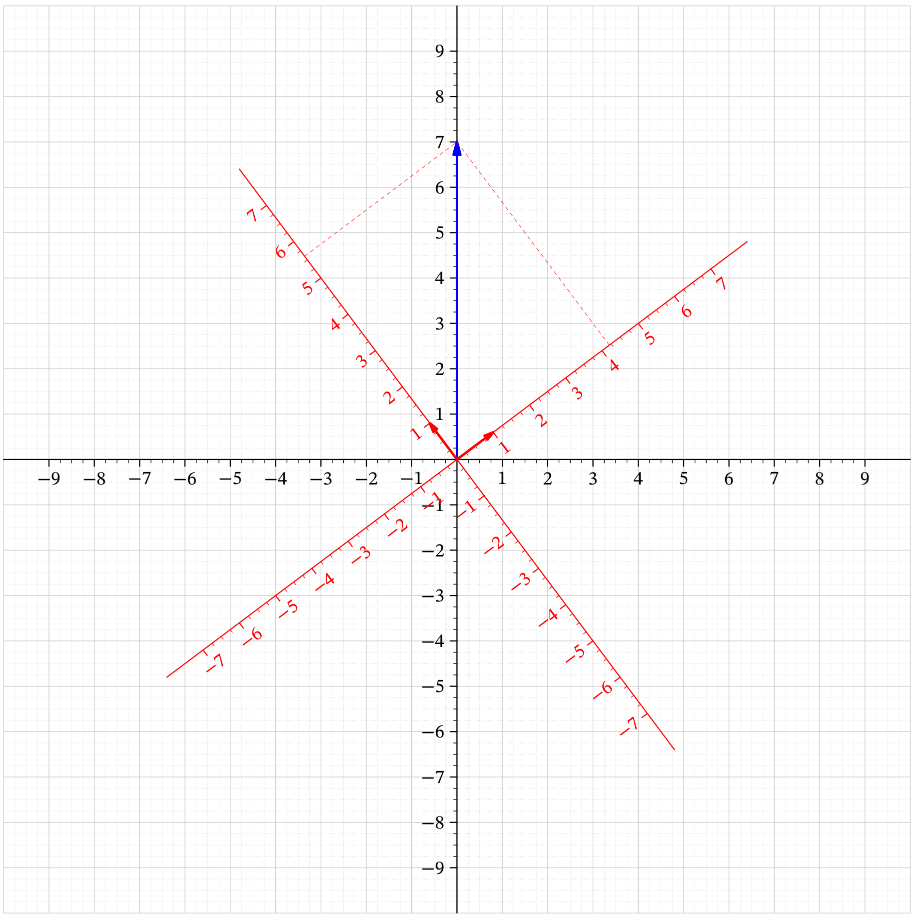
Donada la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{5}(4,3), \frac{1}{5}(-3,4)\right\},$$

representeu els eixos de coordenades corresponents i el vector $\vec{u} = (0,7)$ i calculeu les components de $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}'$.

Solució

La representació gràfica és



Malgrat que la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal, podem calcular també les components sense tenir-ho en compte –tot i que, evidentment, és més llarg– utilitzant l'expressió del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

que, aïllant, queda

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aleshores les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}'$ són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 21 \\ 28 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\vec{u} = (0,7) = \frac{1}{5}(21,28)_{\mathcal{B}'}.$$

Exercici 39

Trobeu una base ortogonal i una ortonormal del pla vectorial P d'equació implícita en la base $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{5}(-3,4,0), \frac{1}{5}(4,3,0), (0,0,1)\right\}$

$$x' - 2y' - z' = 0.$$

Solució

Encara que hi ha conceptes que depenen del producte escalar, com que la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal, treballem directament en la base $\mathcal{B}'$.

En primer lloc, trobem una base del pla en la base $\mathcal{B}'$. Tenim que $x' = 2y' + z'$ i, per tant,

$$(x',y',z') = (2y'+z',y',z') = y'(2,1,0) + z'(1,0,1)$$

i es té que una base del pla és la formada pels vectors de components $(2,1,0)$ i $(1,0,1)$ en la base $\mathcal{B}'$.

Aleshores, aplicant la fórmula de Gram–Schmidt igual que en el cas de la base canònica, obtenim les components dels vectors d'una base ortogonal del pla vectorial P en la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1{}' &: (2,1,0)\,;\\
\vec{v}_2{}' &: (1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(2,1,0)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}(2,1,0) = (1,0,1) - \frac{2}{5}(2,1,0) = \frac{1}{5}(1,-2,5) \simeq (1,-2,5).
\end{aligned}$$

Per tant, obtenim els vectors:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1{}' &= 2\cdot\frac{1}{5}(-3,4,0) + 1\cdot\frac{1}{5}(4,3,0) + 0\cdot(0,0,1) = \frac{1}{5}(-2,11,0) \simeq (-2,11,0)\,;\\
\vec{v}_2{}' &= 1\cdot\frac{1}{5}(-3,4,0) - 2\cdot\frac{1}{5}(4,3,0) + 5\cdot(0,0,1) = \frac{1}{5}(-11,-2,5) \simeq (-11,-2,5).
\end{aligned}$$

En conseqüència, les bases ortogonal i ortonormal són, respectivament,

$$\{(-2,11,0),(-11,-2,5)\}$$

i

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{125}}(-2,11,0),\ \frac{1}{\sqrt{150}}(-11,-2,5)\right\}.$$

Exercici 40

Trobeu una base ortogonal i una ortonormal del pla vectorial P generat pels vectors de components $(1,1,1)$ i $(1,2,3)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)\}.$$

Solució

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal i hi ha conceptes que depenen del producte escalar, fem un canvi de base a la base canònica.

En primer lloc, els vectors són

$$\begin{aligned}
&1(1,-1,-1)+1(-1,1,-1)+1(-1,-1,1)=(-1,-1,-1);\\
&1(1,-1,-1)+2(-1,1,-1)+3(-1,-1,1)=(-4,-2,0)\simeq(-2,-1,0).
\end{aligned}$$

I aplicant ara la fórmula de Gram–Schmidt tenim:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1{}' &=(-1,-1,-1);\\
\vec{v}_2{}' &=(-2,-1,0)-\frac{(-2,-1,0)\cdot(-1,-1,-1)}{(-1,-1,-1)\cdot(-1,-1,-1)}(-1,-1,-1)=(-2,-1,0)-(-1,-1,-1)=(-1,0,1).
\end{aligned}$$

En conseqüència, les bases ortogonal i ortonormal són, respectivament,

$$\{(-1,-1,-1),(-1,0,1)\}$$

i

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\right\}.$$

Exercici 41

La base d'un pla vectorial P està formada pels vectors de components $(4,3,-2)$ i $(1,2,0)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{3}(-1,2,2),\ \frac{1}{3}(2,-1,2),\ \frac{1}{3}(2,2,-1)\right\}.$$

Trobeu unes equacions implícicites en aquesta base $\mathcal{B}'$ i una base de la seva recta perpendicular.

Solució

Encara que hi ha conceptes que depenen del producte escalar, com que la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal, treballem directament en la base $\mathcal{B}'$.

En primer lloc, per ser $\mathcal{B}'$ ortonormal, les equacions de la recta perpendicular $P^{\perp}$ al pla P en la base $\mathcal{B}'$ són

$$\left.\begin{aligned}4x'+3y'-2z'&=0\\ x'+2y'&=0\end{aligned}\right\},$$

que té solució $x' = -2y'$ i $z' = -\frac{5y'}{2}$.

I prenent per exemple $y' = 2$ es té que $x' = -4$ i $z' = -5$ i s'obté

$$-4 \cdot \frac{1}{3}(-1,2,2) + 2 \cdot \frac{1}{3}(2,-1,2) - 5 \cdot \frac{1}{3}(2,2,-1) = \frac{1}{3}(-2,-20,1)\,.$$

Per tant, una base de la recta $P^{\perp}$ és $\{(-2,-20,1)\}$.

Exercici 42

La base d'una recta vectorial R està formada pel vector de components $(1,-2)$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(1,0),(-1,1)\}\,.$$

Trobeu unes equacions implícicites en aquesta base $\mathcal{B}'$ i una base de la seva recta perpendicular.

Solució

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal i hi ha conceptes que depenen del producte escalar, fem un canvi de base a la base canònica.

En primer lloc, el vector de components $(1,-2)$ en la base $\mathcal{B}'$ és

$$1(1,0) - 2(-1,1) = (3,-2)\,.$$

Per tant, la recta perpendicular $R^{\perp}$ és la d'equació implícita en la base canònica

$$3x - 2y = 0$$

i, en particular, té com a base el vector $\{(2,3)\}$.

D'altra banda, el canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i l'equació de la recta s'escriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\,.$$

Llavors, substituint, tenim que

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0\,,$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

i, per tant, l'equació implícita de $R^{\perp}$ en la base $\mathcal{B}'$ és

$$3x' - 5y' = 0\,.$$

Exercici 43

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{x}$ de components $(1, 2, -3)$ en la base $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{3}(2, 2, -1), \frac{1}{3}(2, -1, 2), \frac{1}{3}(-1, 2, 2)\}$ respecte del pla P que té equació

$$2x' - y' - z' = 0$$

en aquesta base $\mathcal{B}'$.

Solució

Encara que hi ha conceptes que depenen del producte escalar, com que la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal, treballem directament en la base $\mathcal{B}'$.

En primer lloc, la recta $P^{\perp}$ està generada pel vector de components $(2, -1, -1)$ en la base $\mathcal{B}'$.

Per tant, la projecció ortogonal de $\vec{x}$ sobre $P^{\perp}$ és el vector $\vec{x}\,''$ de components en la base $\mathcal{B}'$

$$\frac{(1, 2, -3) \cdot (2, -1, -1)}{(2, -1, -1) \cdot (2, -1, -1)}\,(2, -1, -1) = \frac{3}{6}(2, 1, -1) = \frac{1}{2}(2, 1, -1)\,.$$

Llavors, la projecció ortogonal té components en la base $\mathcal{B}'$

$$(1, 2, -3) - \frac{1}{2}(2, 1, -1) = \frac{1}{2}(0, 3, -5)$$

i és, per tant, el vector

$$\vec{x}\,' = 0 \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2) - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = \frac{1}{6}(11, -13, -4)\,.$$

I el simètric de $\vec{x}$ té components en la base $\mathcal{B}'$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(0, 3, -5) - (1, 2, -3) = (-1, 1, -2)$$

i és, doncs, el vector

$$\vec{x}^{\,*} = -1 \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) + 1 \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2) - 2 \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = \frac{1}{3}(2, -7, -1)\,.$$

Exercici 44

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{x}$ de components $(-3, 1)$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (3, -1)\}$ respecte de la recta R que té equació

$$x' - 4y' = 0$$

en aquesta base $\mathcal{B}'$.

Solució

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal i hi ha conceptes que depenen del producte escalar, fem un canvi de base a la base canònica.

Tenim, doncs, que

$$\vec{x} = -3(1, 2) + 1(3, -1) = (0, -7)\,.$$

I, a més, el generador de la recta R és el vector de components $(4,1)$ en la base $\mathcal{B}'$, és a dir:

$$4(1,2)+1(3,-1)=(7,7)\simeq(1,1)\,.$$

Per tant, la projecció ortogonal i el simètric són, respectivament,

$$\vec{x}\,'=\frac{(0,-7)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)}(1,1)=-\frac{7}{2}(1,1)=\frac{1}{2}(-7,-7)$$

i

$$\vec{x}^{\,*}=2\cdot\frac{1}{2}(-7,-7)-(0,-7)=(-7,0)\,.$$

Exercici 45

Sigui $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ una base de V_2 tal que

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=a\,,\qquad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=b\qquad \text{i}\qquad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=c$$

i considerem la matriu

$$G=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}.$$

Comproveu que el producte escalar dels vectors

$$\vec{u}=x_1'\vec{e}_1+y_1'\vec{e}_2\qquad \text{i}\qquad \vec{v}=x_2'\vec{e}_1+y_2'\vec{e}_2$$

és igual al producte de matrius

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1'\end{pmatrix}G\begin{pmatrix} x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}.$$

La matriu G s'anomena *matriu de Gram* de la base $\mathcal{B}'$.

Solució

En primer lloc, a partir de les propietats del producte escalar, tenim que

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=(x_1'\vec{e}_1+y_1'\vec{e}_2)\cdot(x_2'\vec{e}_1+y_2'\vec{e}_2)\\&=x_1'x_2'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+x_1'y_2'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+y_1'x_2'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+y_1'y_2'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2\\&=ax_1'x_2'+bx_1'y_2'+by_1'x_2'+cy_1'y_2'=ax_1'x_2'+b(x_1'y_2'+y_1'x_2')+cy_1'y_2'\,.\end{aligned}$$

D'altra banda, si desenvolupem el producte de matrius, tindrem que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1' & y_1'\end{pmatrix}G\begin{pmatrix} x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} x_1' & y_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} ax_1'+by_1' & bx_1'+cy_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}\\&=(ax_1'+by_1')x_2'+(bx_1'+cy_1')y_2'\\&=ax_1'x_2'+bx_1'y_2'+by_1'x_2'+cy_1'y_2'\\&=ax_1'x_2'+b(x_1'y_2'+y_1'x_2')+cy_1'y_2'\,.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} x_1' & y_1'\end{pmatrix}G\begin{pmatrix} x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}.$$

Exercici 46

Sigui $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V_2 tal que $\|\vec{u}_1\| = 2$, $\|\vec{u}_2\| = \frac{3}{2}$ i els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ formen un angle de 120°. Representeu uns eixos de coordenades corresponents a aquesta base i els vectors $\vec{v}_1 = (3,4)_{\mathcal{B}'}$ i $\vec{v}_2 = (-1,-4)_{\mathcal{B}'}$ i calculeu la longitud dels vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ i l'angle que formen.

Solució

Com que

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \|\vec{u}_1\|^2 = 4\,, \qquad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_2\|^2 = \frac{9}{4} \qquad \text{i} \qquad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \cos 120° = -\frac{3}{2}\,,$$

la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'$ és

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 24 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{36} = 6\,;$$

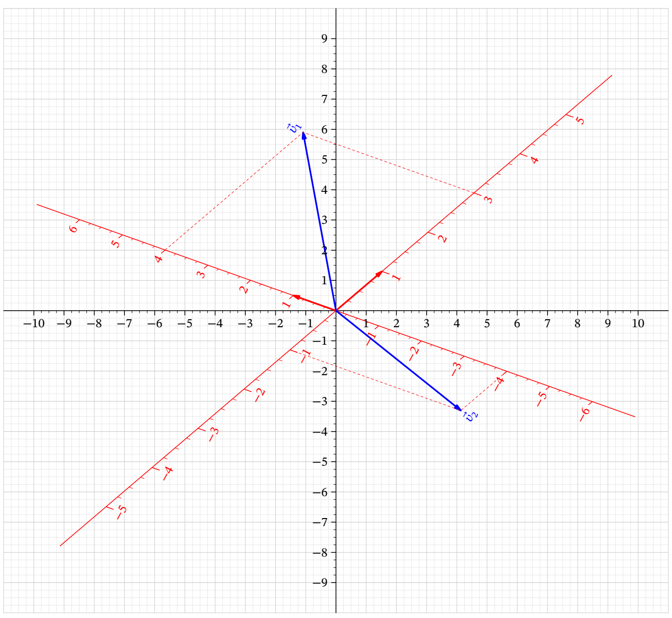
$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,.$$

Ara tenim que

$$\widehat{\vec{v}_1\,\vec{v}_2} = \arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}{6 \cdot 2\sqrt{7}}$$

$$= \arccos \frac{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 24 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}{12\sqrt{7}} = \arccos \frac{-24}{12\sqrt{7}} = \arccos -\frac{2\sqrt{7}}{7} = 139.11°\,.$$

La representació gràfica pot ser



Capítol 4

Geometria del pla i de l'espai

4.1 El pla i l'espai afí

Exercici 1

Calculeu la suma del punt $(1, 3, 3)$ i el vector $(0, -1, 2)$.

ixí

Solució

La suma del punt i el vector és

$$(1, 3, 3) + (0, -1, 2) = (1, 2, 5)\,.$$

Exercici 2

Trobeu el vector lliure d'origen $(3, -1, 4)$ i extrem $(-1, 0, 2)$.

Solució

Restem extrem menys origen:

$$(-1, 0, 2) - (3, -1, 4) = (-4, 1, -2)\,.$$

Exercici 3

Donats els punts $(0, 1, -2)$ i $(2, -3, 2)$, calculeu el seu punt mig.

Solució

Per a calcular el punt mig de dos punts, només cal fer la semisuma de les seves coordenades:

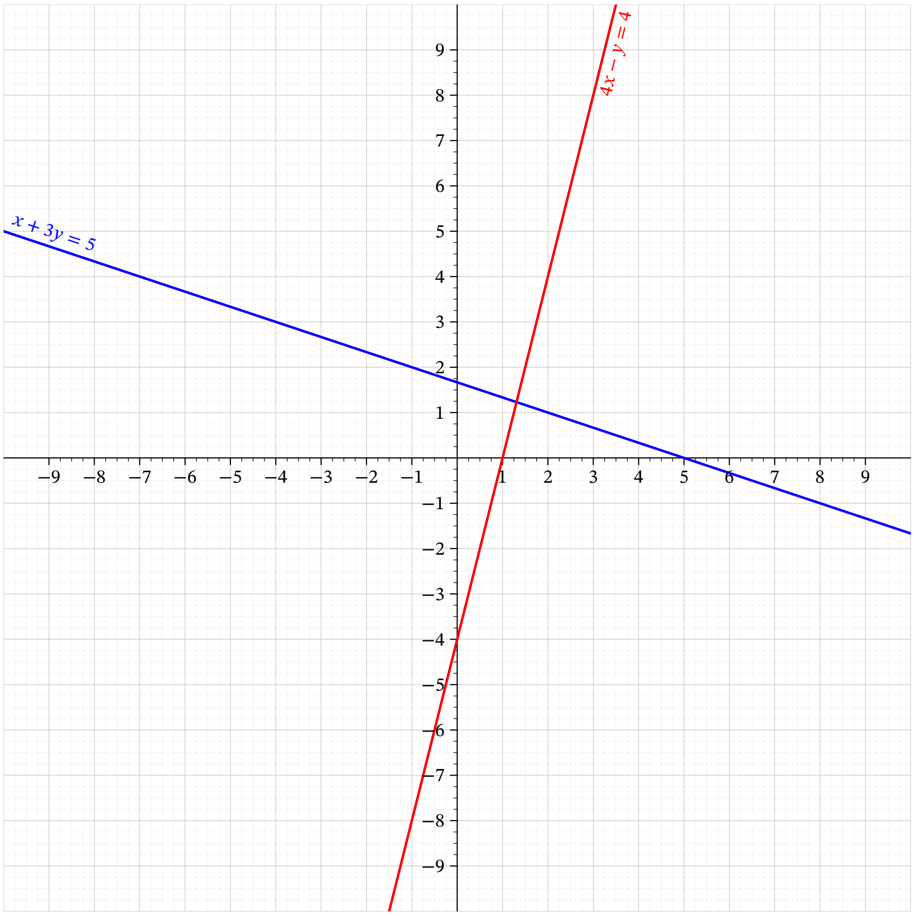
$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (1, -1, 0)\,.$$

Exercici 4

Representeu gràficament les rectes $x + 3y = 5$ i $4x - y = 4$.

Solució

El gràfic és



Exercici 5

Calculeu les equacions implícites de la recta i el pla següents:

(a) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{0} = -z + 3\,;$ (b) $(x, y, z) = (1, 2, -3) + \alpha(-2, 1, 3) + \beta(1, 2, 0)\,.$

Solució

(a) Multiplicant en creu la primera i la segona fraccions i la primera i la tercera, tenim que

$$\left.\begin{aligned} -(y-3) &= 0 \\ x - 1 &= z - 3 \end{aligned}\right\}$$

o, el que és el mateix,

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 \\ x - z &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

(b) Calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 3 & 0 & z+3 \end{vmatrix} = -4(z+3) + 3(y-2) - 6(x-1) - (z+3) = -6x + 3y - 5z - 15\,,$$

obtenim que l'equació implícita és

$$6x - 3y + 5z + 15 = 0\,.$$

Exercici 6

Calculeu les equacions de tipus vectorial de la recta i el pla següents:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(b)} \quad x - 3y + 2z = -5\,.$$

Solució

(a) Resolent el sistema de les equacions implícites, tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim F_2 - 2F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right),$$

que té solució

$$\left.\begin{aligned} x &= -8 - 16z \\ y &= 4 + 6z \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, les equacions paramètriques, vectorial i contínua són, respectivament,

$$\left.\begin{aligned} x &= -8 - 16\alpha \\ y &= 4 + 6\alpha \\ z &= \alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (x, y, z) = (-8, 4, 0) + \alpha(-16, 6, 1) \qquad \text{i} \qquad \frac{x+8}{-16} = \frac{y-4}{6} = \frac{z}{1}\,.$$

(b) Resolent ara l'equació, s'obté que

$$x = -5 + 3y - 2z$$

i, per tant, les equacions paramètriques i vectorial són, respectivament,

$$\left.\begin{aligned} x &= -5 + 3\alpha - 2\beta \\ y &= \alpha \\ z &= \beta \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad (x, y, z) = (-5, 0, 0) + \alpha(3, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)\,.$$

Exercici 7

Donades les rectes d'equacions

$$R_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-2} \qquad \text{i} \qquad R_2 : \left.\begin{aligned} 7x - 4y + 6z &= 21 \\ -5x + 2y - 4z &= -13 \end{aligned}\right\},$$

determineu, si és possible, l'equació implícita del pla que les conté.

Solució

En primer lloc, el vector director de la primera recta és

$$(3,-2,-2)\,.$$

I el de la segona s'obté resolent el sistema de les seves equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & 6 & 21 \\ -5 & 2 & -4 & -13 \end{array}\right)_{F_2\sim 7F_2+5F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & 6 & 21 \\ 0 & -6 & 2 & 14 \end{array}\right),$$

que té solució

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-2z+5}{3} \\ y &= \frac{z-7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, el vector director és $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$ o, equivalentment,

$$(-2,1,3)\,.$$

Llavors, com que els vectors directors no són proporcionals, es té que les rectes no són paral·leles.

A més, el punt de pas de la primera recta $(1,-2,1)$ verifica les equacions implícites de la segona, la qual cosa significa que és el punt d'intersecció de totes dues rectes.

Per tant, el pla que les conté ve donat per

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & x-1 \\ -2 & 1 & y+2 \\ -2 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(-4)-(y+2)\cdot 5+(z-1)\cdot(-1)$$

que, desenvolupant, queda

$$4x+5y+z=-5\,.$$

Exercici 8

Trobeu l'equació de la recta que és paral·lela a la recta

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-2=0 \\ -x+y+z=0 \end{aligned}\right\}$$

i passa pel punt $(1,2,1)$.

Solució

Com que la recta ha de ser paral·lela a la de l'enunciat, les seves equacions implícites han de ser de la forma

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z+D &=0 \\ -x+y+z+D' &=0 \end{aligned}\right\}.$$

I com que la recta ha de passar pel punt $(1,2,1)$, tenim que $D=0$ i $D'=-2$ i les equacions són, doncs,

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z=0 \\ -x+y+z-2=0 \end{aligned}\right\}.$$

Exercici 9

Determineu el pla que és paral·lel al pla

$$(x, y, z) = (-1, 2, 2) + \alpha(3, 1, -1) + \beta(1, -3, -1)$$

i passa pel punt $(-5, 3, -2)$.

Solució

Com que ha de tenir els vectors directors del pla de l'enunciat i ha de passar per $(-5, 3, -2)$, el pla és

$$(x, y, z) = (-5, 3, -2) + \alpha(3, 1, -1) + \beta(1, -3, -1)\,.$$

Exercici 10

Donats el punt $p = (-3, -3, -2)$ i la recta i el pla d'equacions

$$R\,:\quad \left.\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 8 \\ -5x + 4y - 3z &= -20 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad P\,:\; x + 2z = 1\,,$$

trobeu el vector director de la recta que passa pel punt p, és paral·lela al pla P i talla la recta R.

Solució

En primer lloc, el pla paral·lel al pla P que passa pel punt p verifica que

$$-3 + 2 \cdot (-2) + D = 0\,,$$

d'on es té que $D = 7$ i el pla és, doncs, el

$$x + 2z = -7\,.$$

Aleshores, la intersecció d'aquest pla amb la recta s'obté resolent el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 8 \\ -5x + 4y - 3z &= -20 \\ x + 2z &= -7 \end{aligned}\right\}\,,$$

que fem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & -3 & -20 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 + 5F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -22 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -22 \end{array}\right),$$

d'on s'obté que

$$x = 15\,, \qquad y = \frac{11}{2} \qquad \text{i} \qquad z = -11\,.$$

Per tant, el vector director és el que s'obté restant aquest punt i el de l'enunciat

$$\left(15, \frac{11}{2}, -11\right) - (-3, -3, -2) = \left(18, \frac{17}{2}, -9\right)$$

o, equivalentment,

$$(36, 17, -18)\,.$$

Exercici 11

Determineu la posició relativa de les rectes i plans següents i trobeu la seva intersecció, si n'hi ha:

(a) $\dfrac{x+1}{2} = y - 3 = 2 - z \quad \text{i} \quad \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{3}$;

(b) $x + 2y + 3z = 11 \quad \text{i} \quad (x, y, z) = (-1, 3, 4) + \alpha(1, 1, -1) + \beta(5, -1, -1)$;

(c) $\left.\begin{aligned} 3x + y + z &= -3 \\ -x + y + z &= 9 \end{aligned}\right\} \quad \text{i} \quad x + 2y + 3z = 11.$

Solució

(a) Com que els vectors directors de les dues rectes

$$(2, 1, -1) \qquad \text{i} \qquad (-2, 7, 3)$$

no són proporcionals, el rang de tots dos és 2 i tenim que les rectes no són paral·leles.

A més, els punts $(-1, 3, 2)$ i $(1, -1, 0)$ són vectors directors de cada recta i, per tant, es té que el vector de posició relativa és el

$$(-1, 3, 2) - (1, -1, 0) = (-2, 4, 2) \simeq (-1, 2, 1)\,.$$

Finalment, com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,,$$

el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector de posició relativa és 3, del que es dedueix que tampoc no es tallen. I en definitiva, doncs, obtenim que les rectes s'encreuen.

(b) Com que el primer pla està en implícites i el segon en vectorial, podem fer la intersecció de tots dos fàcilment substituint les equacions paramètriques del segon en el primer.

Tenim, doncs,

$$(-1 + \alpha + 5\beta) + 2(3 + \alpha - \beta) + 3(4 - \alpha - \beta) = 11$$

que, operant, queda

$$17 = 11\,,$$

que és impossible. Per tant, els dos plans no es tallen i, en conseqüència, són estrictament paral·lels.

(c) Com que la recta i el pla venen donats per equacions implícites, podem resoldre el sistema lineal conjunt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 0 & 5 & 8 & 36 \end{array}\right)_{F_3 \sim 4F_3 - 5F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right).$$

Per tant, la recta i el pla són estrictament secants. Llavors,

$$\left.\begin{aligned} 3x+y+z&=-3\\ 4y+4\cdot 2&=24\\ z&=2 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 3x+4+2&=-3\\ y&=4\\ z&=2 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x&=-3\\ y&=4\\ z&=2 \end{aligned}\right\},$$

del que es dedueix que es tallen en el punt $(-3, 4, 2)$.

Exercici 12

Estudieu la posició relativa dels plans d'equacions

$$\begin{aligned} mx+y+z&=1\\ 4x+2y+2z&=2m\\ 2x+y+mz&=1\,, \end{aligned}$$

en funció del paràmetre m.

Solució

En primer lloc, calculem el determinant de la matriu de coeficients del sistema:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2+4+4-4-2m-4m = 2m^2-6m+4\,.$$

Llavors, les arrels d'aquest polinomi són

$$m = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{4} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{4} = \frac{6\pm 2}{4} = \begin{cases} 2\\ 1 \end{cases}$$

i, per tant, el determinant s'anul·la per a $m=1$ i $m=2$.

(i) *Primer cas*: $m=1$.

El sistema és ara

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+2z&=2\\ 2x+y+z&=1 \end{aligned}\right\},$$

que podem resoldre pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim F_2-4F_1\\ F_3\sim F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3\sim 2F_3-F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aleshores, com que la seva solució és

$$\begin{aligned} x&=0\\ y&=1-z \end{aligned},$$

tenim que els tres plans es tallen en la recta

$$(x,y,z) = (0,1,0)+t(0,-1,1)\,.$$

És evident que la segona equació és el doble de la tercera; per tant, tenim dos plans coincidents (el segon i el tercer) i el primer pla és secant als dos anteriors.

(ii) *Segon cas*: $m = 2$.

Ara el sistema és

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 4x + 2y + 2z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} ,$$

que podem resoldre igualment pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

que és clarament incompatible i, per tant, no tenen cap punt en comú.

El primer i el segon pla són paral·lels estrictes ja que els coeficients de x, y i z de la segona equació són el doble que els de la primera, però els termes independents no compleixen la mateixa proporció. I el tercer és secant als dos primers.

(iii) *Tercer cas*: $m \neq 2$ i $m \neq 1$.

Llavors el rang de la matriu de coeficients és 3 i, en conseqüència, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que es tallen en un únic punt, que podem calcular resolent el sistema mitjançant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2m & 2 & 2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{2(m-2)(m-1)} = \frac{-2m^2 + 4m - 2}{2(m-2)(m-1)} = \frac{-2(m-1)^2}{2(m-2)(m-1)} = -\frac{m-1}{m-2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 4 & 2m & 2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}}{2(m-2)(m-1)} = \frac{2m^3 - 10m + 8}{2(m-2)(m-1)} = \frac{2(m-1)(m^2+m-4)}{2(m-2)(m-1)} = \frac{m^2+m-4}{m-2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2m \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2(m-2)(m-1)} = \frac{-2m^2 + 6m - 4}{2(m-2)(m-1)} = \frac{-2(m-2)(m-1)}{2(m-2)(m-1)} = -1 .$$

I tenim, doncs, que es tallen en el punt

$$\left(-\frac{m-1}{m-2}, \frac{m^2+m-4}{m-2}, -1\right).$$

Exercici 13

Analitzeu si el sistema següent és referència de P_3:

$$\{(1,-1,0); (1,4,1), (3,1,2), (5,-2,3)\} .$$

Solució

Com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 40 - 6 - 5 + 4 - 36 = 0\,,$$

el sistema vectorial no és base i, en conseqüència, el sistema afí no és referència.

Exercici 14

Determineu les coordenades en la referència canònica del punt que té coordenades $(1, 2, -1)$ en la referència

$$\mathcal{R}' = \{(3, 4, -1);\ (0, -2, 1), (2, -1, 1), (3, 2, 1)\}\,.$$

Solució

Hem de calcular la suma del punt i la combinació lineal dels vectors amb els escalars de les coordenades:

$$(3, 4, -1) + 1(0, -2, 1) + 2(2, -1, 1) - 1(3, 2, 1) = (4, -2, 1)\,.$$

Exercici 15

Calculeu i representeu gràficament les coordenades del punt $(2, -2)$ en la referència

$$\mathcal{R}' = \{(-4, 1);\ (2, 1), (-1, 1)\}\,.$$

Solució

S'ha de complir que

$$(2, -2) = (-4, 1) + x'(2, 1) + y'(-1, 1)\,.$$

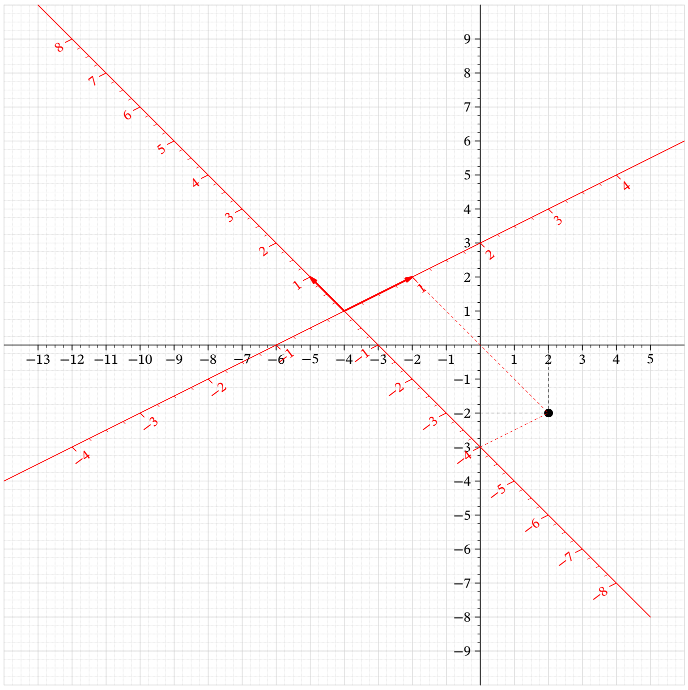
Tenim, doncs, el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right)_{F_2 \sim 2F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \end{array}\right),$$

que té solució $x' = 1$, $y' = -4$. Per tant, les coordenades del punt $(2, -2)$ en la referència $\mathcal{R}'$ són

$$(1, -4)_{\mathcal{R}'}\,.$$

I el gràfic és



Exercici 16

Trobeu el punt mig dels punts de coordenades $(2, 4, 1)$ i $(-3, 1, 0)$ en la referència

$$\mathcal{R}' = \{(0, 3, -2); (4, 1, -1), (2, 0, -1), (3, 1, 3)\}.$$

Solució

Com que els conceptes involucrats no depenen del producte escalar, treballarem en la mateixa referència $\mathcal{R}'$.

Les coordenades del punt mig en la referència $\mathcal{R}'$ són la semisuma de les coordenades dels punts donats:

$$\left(\frac{2-3}{2}, \frac{4+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Per tant, és el punt

$$(0, 3, -2) - \frac{1}{2}(4, 1, -1) + \frac{5}{2}(2, 0, -1) + \frac{1}{2}(3, 1, 3) = \left(\frac{9}{2}, 3, -\frac{5}{2}\right).$$

Exercici 17

Es considera la referència

$$\mathcal{R}' = \{(2, 1); (1, 1), (-1, 1)\}.$$

(a) Determineu la fórmula del canvi de referència de la referència $\mathcal{R}'$ a la referència canònica.

(b) Calculeu l'equació en la referència $\mathcal{R}'$ de la recta que en la referència canònica té equació

$$2x - 3y = 2.$$

Solució

(a) La fórmula del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(b) Llavors, substituint a l'equació de la recta $2x - 3y = 2$, tenim

$$2(x' - y' + 2) - 3(x' + y' + 1) = 2$$

o, el que és el mateix,

$$-x' - 5y' = 1\,.$$

Exercici 18

Es considera la referència de P_2

$$\mathcal{R}' = \{(-2, 1); (3, -1), (4, 3)\}\,.$$

(a) Determineu la fórmula del canvi de referència de la referència canònica a la referència $\mathcal{R}'$ anterior.

(b) Calculeu l'equació en la referència canònica de la recta que en la referència $\mathcal{R}'$ té equació

$$x' + 2y' = -2\,.$$

Solució

(a) La fórmula del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Per tant, el canvi de referència invers de $\mathcal{R}_c$ a $\mathcal{R}'$ ve donat per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/13 \\ -1/13 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Llavors, substituint a l'equació de la recta $x' + 2y' = -2$, tenim

$$\frac{1}{13}(3x - 4y + 10) + 2 \cdot \frac{1}{13}(x + 3y - 1) = -2$$

o, el que és el mateix,

$$5x + 2y = -34\,.$$

Exercici 19

Es consideren les referències de P_2

$$\mathcal{R}' = \{(4,-2);\ (2,-1),(1,2)\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{R}'' = \{(-5,5);\ (3,1),(-1,3)\}\,.$$

(a) Determineu la fórmula del canvi de referència de la referència $\mathcal{R}''$ a la referència $\mathcal{R}'$.

(b) Calculeu l'equació en la referència $\mathcal{R}''$ de la recta que en la referència $\mathcal{R}'$ té equació

$$x' - 2y' = -1\,.$$

Solució

(a) La fórmula del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ i de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

respectivament. Llavors, igualant, tenim que

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

d'on, aïllant, s'obté la fórmula del canvi de referència de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left[-\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right] = \\ &\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

o, el que és el mateix,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

(b) Substituint ara a l'equació $x' - 2y' = -1$, tenim

$$(x'' - y'' - 5) - 2(x'' + y'' + 1) = -1$$

o, el que és el mateix,

$$x'' + 3y'' = -6\,.$$

Exercici 20

La representació del punt p en la referència

$$\mathcal{R}' = \{(-2,-3,-1);\ (1,-1,1),(-1,2,-1),(2,-1,1)\}$$

és $p = (-2,2,-1)_{\mathcal{R}'}$. Quines són les seves coordenades en la referència

$$\mathcal{R}'' = \{(2,-1,-2);\ (-3,1,1),(2,2,-1),(2,1,-1)\}\,?$$

Solució

Les expressions del canvi de coordenades de la referència $\mathcal{R}'$ a la referència canònica i de la referència $\mathcal{R}''$ a la referència canònica són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Si igualem les dues expressions, tenim que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

i, com que les coordenades de p en la referència $\mathcal{R}'$ són $p = (-2, 2, -1)_{\mathcal{R}'}$, cal trobar (x'', y'', z'') tals que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

d'on, operant i aïllant, es té

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

que podem resoldre pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & -10 \\ 0 & 8 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -22 \end{array}\right)_{F_3 \sim 8F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & -10 \\ 0 & 8 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -171 \end{array}\right)$$

d'on, aïllant, s'obté $x'' = 18$, $y'' = -35$ i $z'' = 57$. Per tant, les coordenades del punt p respecte $\mathcal{R}''$ són

$$p = (18, -35, 57)_{\mathcal{R}''}.$$

Exercici 21

Sabem que l'origen de la referència $\mathcal{R}'$ és el punt $(4, 1, 5)$ i que les coordenades respectives dels punts $(2, 2, 1)$, $(-4, -1, 2)$ i $(4, 2, -1)$ en aquesta referència són

$$(-3, 6, 13)_{\mathcal{R}'}, \quad (-6, 11, 19)_{\mathcal{R}'} \quad \text{i} \quad (-1, 6, 17)_{\mathcal{R}'}.$$

Trobeu la referència $\mathcal{R}'$.

Solució

L'expressió del canvi de coordenades de la referència $\mathcal{R}'$ a la referència canònica és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

on C és la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ de la referència $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{B}_c$.

Aleshores, tindrem que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència,

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & -6 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 6 & 11 & 6 \\ 13 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de canvi de base C és

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 6 & 11 & 6 \\ 13 & 19 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

I, en definitiva, la referència és

$$\mathcal{R}' = \{(4, 1, 5); (-1, -2, 1), (-3, -3, 2), (1, 1, -1)\}.$$

Exercici 22

Trobeu l'equació implícita en la referència $\mathcal{R}' = \{(1, 4); (-3, 1), (-1, 0)\}$ de la recta que passa pel punt $(-3, 2)$ i és paral·lela a la recta d'equació implícita en aquesta mateixa referència

$$x' + y' = -4.$$

Solució

Com que els conceptes involucrats no depenen del producte escalar, treballarem en la mateixa referència $\mathcal{R}'$.

Com que la recta ha de ser paral·lela a la de l'enunciat, la seva equació implícita ha de ser de la forma

$$x' + y' + C = 0.$$

Per la seva banda, les coordenades del punt $(-3, 2)$ en la referència $\mathcal{R}'$ surten de

$$(-3, 2) = (1, 4) + x'(-3, 1) + y'(-1, 0).$$

I com que el vector de posició del punt $(-3, 2)$ és el

$$(-3, 2) - (1, 4) = (-4, -2),$$

s'obté el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

que té solució $x' = -2$ i $y' = 10$.

I imposant que aquests valors verifiquin l'equació de la recta es té que

$$-2 + 10 + C = 0,$$

que vol dir que ha de ser $C = -8$ i, per tant, l'equació implícita en la referència $\mathcal{R}'$ és

$$x' + y' = 8\,.$$

Exercici 23

Analitzeu la posició relativa de les dues rectes de P_3 que tenen equacions

$$\frac{x'-2}{-3} = \frac{y'+1}{-2} = \frac{z'+1}{1} \qquad \text{i} \qquad \frac{x'-3}{2} = \frac{y'-2}{-1} = \frac{z'}{-2}$$

en la referència $\mathcal{R}' = \{(-1,0,2);\,(-1,2,3),(1,3,2),(0,1,1)\}$.

Solució

Com que els conceptes involucrats no depenen del producte escalar, treballarem en la mateixa referència $\mathcal{R}'$.

En primer lloc, com que les components

$$(-3,-2,1) \qquad \text{i} \qquad (2,-1,-2)$$

dels vectors directors en la referència $\mathcal{R}'$ de les dues rectes no són proporcionals, tenim que les rectes no són paral·leles.

I les components del vector de posició relativa en la base de la referència $\mathcal{R}'$ del punt de pas de coordenades $(2,-1,-1)$ de la primera recta al punt de pas de coordenades $(3,2,0)$ de la segona és el

$$(3,2,0) - (2,-1,-1) = (1,3,1)\,.$$

I com que

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3+4+6+1-18+4 = 0\,,$$

es dedueix que les dues rectes són estrictament secants.

A més, podem trobar la intersecció resolent el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'-2}{-3} &= \frac{y'+1}{-2} \\ \frac{x'-2}{-3} &= \frac{z'+1}{1} \\ \frac{x'-3}{2} &= \frac{y'-2}{-1} \\ \frac{x'-3}{2} &= \frac{z'}{-2} \end{aligned}\right\}\,.$$

I com que té solucions

$$x' = 5\,, \qquad y' = 1 \qquad \text{i} \qquad z' = -2\,,$$

es té que el punt és el de coordenades $(5,1,-2)$ en la referència $\mathcal{R}'$, és a dir, el

$$(-1,0,2) + 5(-1,2,3) + 1(1,3,2) - 2(0,1,1) = (-5,11,17)\,.$$

4.2 El pla i l'espai afí euclidià

Exercici 24

Calculeu la distància del punt $(3,1,2)$ al punt $(2,3,0)$.

Solució

La distància és

$$\begin{aligned} d\left((3,1,2),(2,3,0)\right) &= \|\overrightarrow{(3,1,2)(2,3,0)}\| = \|(2-3,3-1,0-2)\| \\ &= \sqrt{(2-3)^2+(3-1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{9} = 3\,. \end{aligned}$$

Exercici 25

Trobeu un vector associat al pla que passa per $(1,2,-4)$ i té vectors directors $(2,-3,-2)$ i $(-1,2,3)$.

Solució

Com que el vector associat ha de ser ortogonal a $(2,-3,-2)$ i $(-1,2,3)$, prenem el seu producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-4,1)\,.$$

Exercici 26

Determineu, si és possible, l'equació implícita del pla que conté les rectes d'equacions

$$R_1 : x-1 = y-4 = z-2 \qquad \text{i} \qquad R_2 : \left.\begin{aligned} -x+2y-z &= 3 \\ x-3y+2z &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

Solució

En primer lloc, el vector director de la primera recta és el $(1,1,1)$. I el de la segona el podem trobar fent el producte vectorial dels dos vectors associats als plans que la defineixen:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1,1,1)\,.$$

Aleshores, com que els vectors directors són proporcionals –de fet, iguals–, s'obté que les rectes són paral·leles. I com que el punt de pas de la primera $(1,4,2)$ no pertany a la segona perquè no verifica les seves equacions, es té que no són iguals i, en conseqüència, tenim que són estrictament paral·leles.

Llavors, com que el pla que busquem ha de contenir la segona recta, serà del tipus

$$\alpha(-x+2y-z-3) + \beta(x-3y+2z-9) = 0\,.$$

I com que ha de passar pel punt de pas $(1,4,2)$ de la primera, substituint, s'ha de verificar que

$$2\alpha - 16\beta = 0\,.$$

I prenent per exemple $\alpha = 8$ i $\beta = 1$ com a solució, tenim que el pla és

$$8(-x + 2y - z - 3) + (x - 3y + 2z - 9) = 0$$

o, el que és el mateix,

$$7x - 13y + 6z + 33 = 0\,.$$

Exercici 27

Determineu si són perpendiculars o no les rectes i plans següents:

(a) $\dfrac{x+1}{2} = y - 3 = \dfrac{z-2}{-1}$ i $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-7} = \dfrac{z-2}{-3}$;

(b) $-x + 2y - 3z = 0$ i $2x + y + 3z = -2$;

(c) $\dfrac{x-4}{-1} = y = \dfrac{z+1}{0}$ i $x - y = -2$.

102

Solució

(a) Com que els vectors directors de les rectes són ortogonals

$$(2, 1, -1) \cdot (2, -7, -3) = 4 - 7 + 3 = 0\,,$$

les rectes són perpendiculars.

(b) Com que els vectors associats als plans no són ortogonals

$$(-1, 2, 3) \cdot (2, 1, 3) = 9 \neq 0\,,$$

els plans no són perpendiculars.

(c) Com que el vector director de la recta i el vector associat al pla són proporcionals

$$(-1, 1, 0) = -(1, -1, 0)\,,$$

la recta i el pla són perpendiculars.

Exercici 28

Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 0, 3)$ i és perpendicular a la recta

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{3}\,.$$

Solució

El vector director de la recta és un vector associat al pla. Per tant, l'equació és de la forma

$$x + 5y + 3z + D = 0\,.$$

I com que passa per $(1, 0, 3)$, s'obté que $D = -10$. Per tant, l'equació implícita del pla és

$$x + 5y + 3z - 10 = 0\,.$$

Exercici 29

Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $(3, 1, 2)$ i és perpendicular al pla

$$x + 3y - 4z = 3\,.$$

Solució

Com que el vector director de la recta ha de ser un vector associat al pla, podem agafar el $(1, 3, -4)$:

$$x - 3 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}\,.$$

Exercici 30

Calculeu l'angle format per les rectes i plans següents:

(a) $x = y - 3 = \dfrac{z+1}{0}$ i $(x, y, z) = (-1, 3, 2) + \alpha(-1, 0, 1)$;

(b) $2x + 2y + z = -1$ i $x + z = -3$;

(c) $\dfrac{x-3}{-1} = y = \dfrac{z}{2}$ i $x + 2y + z = 11$.

Solució

(a) Com que els vectors directors respectius de les dues rectes són $(1, 1, 0)$ i $(-1, 0, 1)$, l'angle determinat per aquestes rectes és

$$\arccos \frac{|(1,1,0)\cdot(-1,0,1)|}{\|(1,1,0)\|\|(-1,0,1)\|} = \arccos \frac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\,.$$

(b) Com que els vectors associats respectius als dos plans són $(2, 2, 1)$ i $(1, 0, 1)$, l'angle determinat per aquests plans és

$$\arccos \frac{|(2,2,1)\cdot(1,0,1)|}{\|(2,2,1)\|\|(1,0,1)\|} = \arccos \frac{|3|}{3\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

(c) Com que el vector director de la recta és el $(-1, 1, 2)$ i el vector associat al pla és el $(1, 2, 1)$, l'angle determinat per aquesta recta i aquest pla és

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|(-1,1,2)\cdot(1,2,1)|}{\|(-1,1,2)\|\|(1,2,1)\|} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Exercici 31

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $(3, 6, 5)$ respecte del pla

$$x + 2y + 3z = 2\,.$$

Solució

El vector associat al pla és el $(1, 2, 3)$. Per tant, la recta perpendicular al pla que passa per $(3, 6, 5)$ és

$$(x, y, z) = (3, 6, 5) + \alpha(1, 2, 3)\,.$$

I substituint a l'equació del pla

$$(3+\alpha)+2(6+2\alpha)+3(5+3\alpha)=2$$

es té $14\alpha=-28$, d'on s'obté que $\alpha=-2$. Per tant, la projecció ortogonal és

$$(3,6,5)-2(1,2,3)=(1,2,-1)\,.$$

I com que la projecció ortogonal és el punt mig del punt donat i del seu simètric (x,y,z), es té que

$$\frac{(3,6,5)+(x,y,z)}{2}=(1,2,-1)\,,$$

és a dir,

$$(x,y,z)=(-1,-2,-7)\,.$$

Exercici 32

Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $(3,5,-1)$ respecte de la recta

$$\frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}\,.$$

Solució

Com que el vector director de la recta és un vector associat al pla, l'equació del pla perpendicular és

$$5x-2y+z+D=0\,.$$

I com que aquest pla ha de passar pel punt $(3,5,-1)$, obtenim que $D=-4$ i és, doncs,

$$5x-2y+z-4=0\,.$$

Llavors, la projecció ortogonal és la intersecció del pla anterior amb la recta, que té equació vectorial

$$(x,y,z)=(-4,3,0)+\alpha(5,-2,1)\,.$$

Per tant, substituint a l'equació del pla, tenim

$$5(-4+5\alpha)-2(3-2\alpha)+\alpha-4=0\,,$$

del que es dedueix que $\alpha=1$ i la projecció ortogonal és, doncs, el punt

$$(-4,3,0)+1(5,-2,1)=(1,1,1)\,.$$

I com que la projecció ortogonal és el punt mig del punt donat i del seu simètric (x,y,z), es té que

$$\frac{(3,5,-1)+(x,y,z)}{2}=(1,1,1)$$

o, el que és el mateix,

$$(x,y,z)=(-1,-3,3)\,.$$

Exercici 33

Calculeu la distància del punt $(1,1,1)$ a la recta

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-12}{3}=\frac{z}{-1}\,.$$

Solució

Com que la norma del producte vectorial de dos vectors de P_3 és l'àrea del paral·lelogram que determinen, tenim que la distància d'un punt a una recta és el quocient entre la norma del producte vectorial del vector de posició relativa i del vector director de la recta i la norma d'aquest darrer.

Llavors, tenim que el vector que uneix el punt de l'enunciat amb el punt de pas $(7,12,0)$ de la recta és el

$$(7,12,0)-(1,1,1)=(6,11,-1)\,.$$

I el producte vectorial d'aquest vector i del vector director de la recta és el

$$(6,11,-1)\wedge(2,3,-1)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 6 & 11 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(-8,4,-4)=4(-2,1,-1)\,.$$

Per tant, la distància del punt a la recta és

$$\frac{\|\,4(-2,1,-1)\,\|}{\|\,(2,3,-1)\,\|}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}\,.$$

Exercici 34

Calculeu la distància del punt $(1,-3,2)$ al pla

$$-3x+2y+z=7\,.$$

Solució

Només cal aplicar la fórmula per a la distància d'un punt a un pla:

$$\frac{|-3\cdot 1+2\cdot(-3)+2-7|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\,.$$

Exercici 35

Calculeu la distància que hi ha entre les rectes i plans següents:

(a) $\dfrac{x-1/2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1/2}{5}$ i $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{3}$;

(b) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ i $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$;

(c) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{1}$ i $x-2y+5z-1=0$;

(d) $x-2y+3z=1$ i $x-2y+3z=4$.

Solució

(a) En primer lloc, cal trobar la seva posició relativa.

Llavors, com que els vectors no són proporcionals les rectes no són paral·leles. I com que el vector de posició relativa dels punts de pas $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ i $(0,0,1)$ de les dues rectes és el

$$(0,0,1)-\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

i el determinant dels dos vectors directors i del vector de posició relativa és

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1/2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0\,,$$

s'obté que s'encreuen.

Aleshores, els vectors directors de pla paral·lel a la primera recta que conté la segona són els de les dues rectes, és a dir, $(3,4,5)$ i $(-1,-3,3)$. I com que el seu producte vectorial és

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (-27,14,5)\,,$$

es té que la distància entre les dues rectes és

$$\frac{|-16|}{\|(-27,14,5)\|} = \frac{16}{\sqrt{950}} = \frac{8\sqrt{38}}{95}\,.$$

(b) En primer lloc, és clar que les dues rectes són estrictament paral·leles, ja que tenen vectors directors proporcionals i el punt de pas de la primera, per exemple, no pertany a la segona:

$$\frac{0+2}{-1} \neq \frac{1}{-3}\,.$$

Per tant, la distància entre elles és la distància d'un punt d'elles (el $(0,1,2)$ de la primera, per exemple) a l'altra. Llavors, tenim que el vector que uneix tots dos punts de pas és el

$$(0,1,2) - (-2,0,1) = (2,1,1)$$

i el producte vectorial d'aquest vector i del vector director de la segona recta és el

$$(2,1,1) \wedge (-1,-3,2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (5,-5,-5) = 5(1,-1,-1)\,.$$

Per tant, la distància del punt a la recta és

$$\frac{\|5(1,-1,-1)\|}{\|(-1,-3,2)\|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{42}}{14}\,.$$

(c) En primer lloc, la recta i el pla són estrictament paral·lels perquè el vector director de la recta i l'associat al pla són ortogonals ja que

$$(1,3,1)\cdot(1,-2,5) = 0$$

i el punt de pas de la recta no pertany al pla perquè no satisfà l'equació d'aquest:

$$1 - 2\cdot 3 + 5\cdot(-2) - 1 = -16 \neq 0\,.$$

Per tant, només cal agafar el punt de pas $(1,3,-2)$ de la recta i calcular la distància d'aquest punt al pla:

$$\frac{|1 - 2\cdot 3 + 5\cdot(-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{16}{\sqrt{30}} = \frac{8\sqrt{30}}{15}\,.$$

(d) En aquest cas, veient les seves equacions, és clar que els dos plans són estrictament paral·lels.

Per tant, la distància entre ells és igual a la distància d'un punt d'un ells (per exemple, el $(1, 0, 0)$ del primer) a l'altre pla:

$$\frac{|1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}\,.$$

Exercici 36

Donats els punts $p = (-1, 3, -2)$ i el pla P d'equació

$$x - 3y + 3z = 5\,,$$

trobeu l'equació dels dos plans paral·lels a P que estan a una distància $d = 2\sqrt{19}$ del punt p.

Solució

En primer lloc, els plans buscats seran de la forma

$$x - 3y + 3z + D = 0\,.$$

Aleshores, substituint a la fórmula de la distància d'un punt a un pla tenim:

$$2\sqrt{19} = \frac{|-1 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}}$$

o, el que és el mateix,

$$2\sqrt{19} = \frac{|-16 + D|}{\sqrt{19}}$$

o, equivalentment,

$$|D - 16| = 38\,.$$

Per tant, ha de ser

$$D - 16 = 38 \qquad \text{o} \qquad -(D - 16) = 38\,,$$

és a dir, $D = 54$ o $D = -22$ i, en conseqüència, els plans són

$$x - 3y + 3z = -54 \qquad \text{i} \qquad x - 3y + 3z = 22\,.$$

Exercici 37

Donades les rectes d'equacions

$$R_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+4}{-3} \qquad \text{i} \qquad R_2 : \left.\begin{aligned} -9x + 2y - z &= 35 \\ -12x + 3y - z &= 46 \end{aligned}\right\}\,,$$

calculeu la distància entre elles, les equacions implícites de la perpendicular comuna a R_1 i R_2 que les talla i les interseccions d'aquesta recta amb R_1 i R_2.

Solució

En primer lloc, la primera recta passa pel punt $(1, 4, -4)$ i té vector director $(2, -3, -3)$. I el de la segona s'obté resolent el sistema de les seves equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 2 & -1 & 35 \\ -12 & 3 & -1 & 46 \end{array}\right)_{F_2 \sim 3F_2 - 4F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 2 & -1 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

que té solució general
$$x = \frac{-z-13}{3} \qquad \text{i} \qquad y = -z-2\,.$$
Per tant, el vector director és $\left(-\frac{1}{3}, -1, 1\right)$ o, equivalentment,
$$(-1, -3, 3)\,.$$
I, a més, un punt de pas seu és
$$\left(-\frac{13}{3}, -2, 0\right)\,.$$
A més, el producte vectorial dels vectors directors és
$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (-18, -3, -9)\,;$$
i el vector que uneix els dos punts de pas,
$$\left(-\frac{13}{3}, -2, 0\right) - (1, 4, -4) = \left(-\frac{16}{3}, -6, 4\right)\,.$$
Per tant, la distància entre les rectes és
$$\frac{\left|\left(-\frac{16}{3}, -6, 4\right) \cdot (-18, -3, -9)\right|}{\|\,(-18, -3, -9)\,\|} = \frac{78}{3\sqrt{46}} = \frac{13\sqrt{46}}{23}\,.$$
D'altra banda, les equacions dels plans P i Q que contenen respectivament les rectes R_1 i R_2 i el producte vectorial anterior venen donades per
$$\begin{vmatrix} 2 & -18 & x-1 \\ -3 & -3 & y-4 \\ -3 & -9 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -18 & x+13/3 \\ -3 & -3 & y+2 \\ 3 & -9 & z \end{vmatrix} = 0$$
que, desenvolupant, dona
$$3x + 12y - 10z - 91 = 0 \qquad \text{i} \qquad 12x - 21y - 17z + 10 = 0\,,$$
el que significa que les equacions implícites de la perpendicular comuna a R_1 i R_2 que les talla són
$$\left.\begin{aligned} 3x + 12y - 10z &= 91 \\ 12x - 21y - 17z &= -10 \end{aligned}\right\}\,.$$
I, finalment, les interseccions d'aquesta recta amb les rectes R_1 i R_2 coincideixen amb les interseccions de cadascun d'aquests plans amb R_1 i R_2 que, resolent els sistemes corresponents, donen els punts
$$\left(-\frac{57}{23}, \frac{82}{23}, -\frac{128}{23}\right) \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{21}{23}, \frac{95}{23}, -\frac{89}{23}\right)\,.$$

Exercici 38

Trobeu l'ortocentre del triangle a l'espai que té els vèrtexs en els punts $(1, 4, 4)$, $(-3, -3, 3)$ i $(-2, 1, 1)$ (l'ortocentre d'un triangle és el punt on es tallen les seves altures, és a dir, les rectes perpendiculars a cada costat que passen pel vèrtex oposat).

Solució

Els vectors determinats pels tres costats del triangle són

$$\begin{aligned}(-3,-3,3)-(1,4,4)&=(-4,-7,-1)\,;\\(-2,1,1)-(1,4,4)&=(-3,-3,-3)\,;\\(-2,1,1)-(-3,-3,3)&=(1,4,-2)\,.\end{aligned}$$

Ara n'hi ha prou en trobar la intersecció de dues de les tres altures del triangle. I aquestes són les interseccions del pla que conté el triangle (que ve donat, per exemple, pel punt de pas $(1,4,4)$ i els vectors directors $(-4,-7,-1)$ i $(-3,-3,-3)$)

$$\begin{vmatrix}-4 & -3 & x-1\\ -7 & -3 & y-4\\ -1 & -3 & z-4\end{vmatrix}=0$$

o bé

$$2x-y-z=-6$$

i dels plans perpendiculars a dos dels costats (els de vectors directors $(1,4,-2)$ i $(-3,-3,-3)\simeq(1,1,1)$ per exemple) i que passen pels vèrtexs oposats (el $(1,4,4)$ i el $(-3,-3,3)$ en aquest cas)

$$x+4y-2z=9 \qquad \text{i} \qquad x+y+z=-3\,.$$

Per tant, l'ortocentre serà la intersecció d'aquests tres plans:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & -6\\ 1 & 4 & -2 & 9\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2-F_1\\ F_3\sim 2F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 9 & -3 & 24\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right)_{F_3\sim 3F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 9 & -3 & 24\\ 0 & 0 & 12 & -24\end{array}\right).$$

Llavors, és clar que la solució d'aquest sistema és $x=-3$, $y=2$ i $z=-2$.

Per tant, en definitiva, es té que l'ortocentre és el punt

$$(-3,2,-2)\,.$$

Exercici 39

Donada la referència $\mathcal{R}'=\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ és

$$G=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

i les equacions implícites de la recta R en la referència $\mathcal{R}'$ són

$$\left.\begin{aligned}5x'+6y'+3z'&=27\\ x'+y'+z'&=4\end{aligned}\right\},$$

trobeu l'equació del pla perpendicular a R que passa pel punt $p=(3,4,0)_{\mathcal{R}'}$.

Solució

Per trobar un vector director de la recta, expressat evidentment en la base $\mathcal{B}'$, només cal que resolem el sistema d'eqacions

$$\left.\begin{aligned} 5x' + 6y' + 3z' &= 0 \\ x' + y' + z' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ho fem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim 5F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{d'on} \quad \left.\begin{aligned} 5x' + 6y' + 3z' &= 0 \\ -y' + 2z' &= 0 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x' &= -3z' \\ y' &= 2z' \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, el vector $\vec{u} = (-3, 2, 1)_{\mathcal{B}'}$ és un vector director de la recta R. Com que els vectors $(x', y', z')_{\mathcal{B}'}$ del pla P han de ser perpendiculars a aquest vector, han de complir que

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{o bé} \qquad -6x' + 2y' - 2z' = 0\,.$$

Com que aquesta és l'equació dels vectors del pla P, l'equació del pla afí P serà de la forma $3x' - y' + z' = D$. Per determinat la D, només cal que imposem que el pla ha de passar pel punt $p = (3, 4, 0)_{\mathcal{R}'}$ i obtenim que $D = 5$. Així dons, el pla perpendicular a la recta R té equació implícita

$$x' - y' + z' = 5$$

en la referència $\mathcal{R}'$.

Exercici 40

Determineu el centre i el radi de la circumferència que passa pels punts $(-1, -5)$, $(5, 1)$ i $(-1, 3)$.

Solució

L'equació de la circumferència és de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\,.$$

Si imposem que els tres punts de l'enunciat han de complir aquesta equació, obtenim el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} -A - 5B + C + 26 &= 0 \\ 5A + B + C + 26 &= 0 \\ -A + 3B + C + 10 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

i, si el resolem pel mètode de Gauss, tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 26 \\ 5 & 1 & 1 & -26 \\ -1 & 3 & 1 & -10 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 - 5F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 26 \\ 0 & -24 & 6 & -156 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{array}\right).$$

Per tant, ens queda el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} A + 5B - C &= 26 \\ -24B + 6C &= -156 \\ 8B &= 16 \end{aligned}\right\},$$

que té per solució $B = 2$, $B = -18$ i $A = -2$ i, per tant, l'equació de la circumferència és

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$$

que, completant quadrats, podem escriure com a

$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 18 = 0$$

o bé

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$$

i obtenim que es tracta, doncs, de la circumferència de centre $(1, -1)$ i radi $r = \sqrt{20}$.

Exercici 41

Determineu si la recta $x - y + 1 = 0$ és secant, tangent o exterior a la circumferència

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0\,.$$

Solució

Aïllant la y de l'equació de la recta, s'obté

$$y = x + 1\,.$$

I substituint a l'equació de la circumferència queda

$$x^2 + (x+1)^2 - 2x + 4(x+1) - 3 = 0\,,$$

o, el que és el mateix,

$$2x^2 + 4x + 2 = 0\,,$$

que té solució doble $x = -1$. Llavors, $y = -1 + 1 = 0$ i tenim, doncs, que la solució és única i, per tant, és tangent en el punt $(-1, 0)$.

Exercici 42

Determineu els vèrtexs i els focus de l'el·lipse d'equació següent i representeu–ho gràficament:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\,.$$

Solució

En primer lloc, el semieix major, el semieix menor i la semidistància focal són, respectivament,

$$a = \sqrt{4} = 2\,, \qquad b = \sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}\,.$$

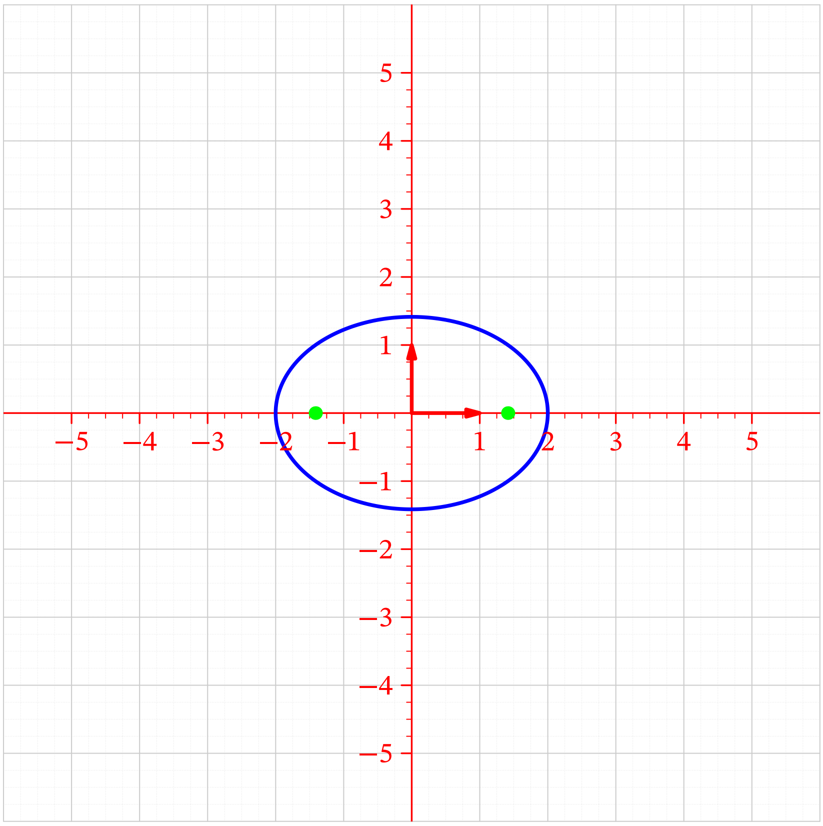
Per tant, els vèrtexs són

$$(a, 0) = (2, 0)\,, \qquad (-a, 0) = (-2, 0)\,, \qquad (0, b) = (0, \sqrt{2}) \qquad \text{i} \qquad (0, -b) = (0, -\sqrt{2})\,;$$

i els focus,

$$(c, 0) = (\sqrt{2}, 0) \qquad \text{i} \qquad (-c, 0) = (-\sqrt{2}, 0)\,.$$

I el gràfic és



Exercici 43

Determineu el focus i la directriu de la paràbola d'equació següent i representeu–ho gràficament:

$$y = \frac{x^2}{4\sqrt{5}}\,.$$

Solució

Com que $2p = 4\sqrt{5}$, es té que el paràmetre és

$$p = 2\sqrt{5}\,.$$

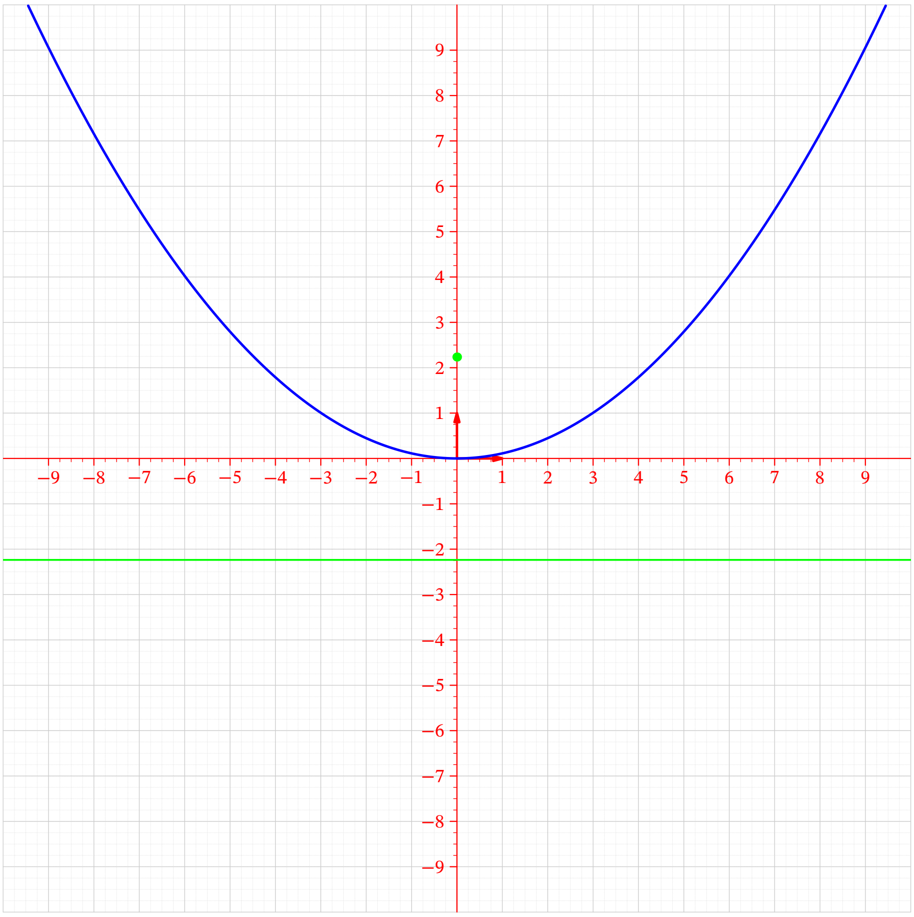
Per tant, el focus és

$$\left(0, \frac{p}{2}\right) = (0, \sqrt{5})\,;$$

i la directriu,

$$y = -\frac{p}{2} = -\sqrt{5}\,.$$

I el gràfic és



Exercici 44

Determineu els vèrtexs, els focus i les asímptotes de la hipèrbola d'equació següent i representeu–ho gràficament:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1\,.$$

Solució

En primer lloc, el semieix real, el semieix imaginari i la semidistància focal són, respectivament,

$$a = \sqrt{1} = 1\,, \qquad b = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{i} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

Per tant, els vèrtexs són

$$(a, 0) = (1, 0) \qquad \text{i} \qquad (-a, 0) = (-1, 0)\,;$$

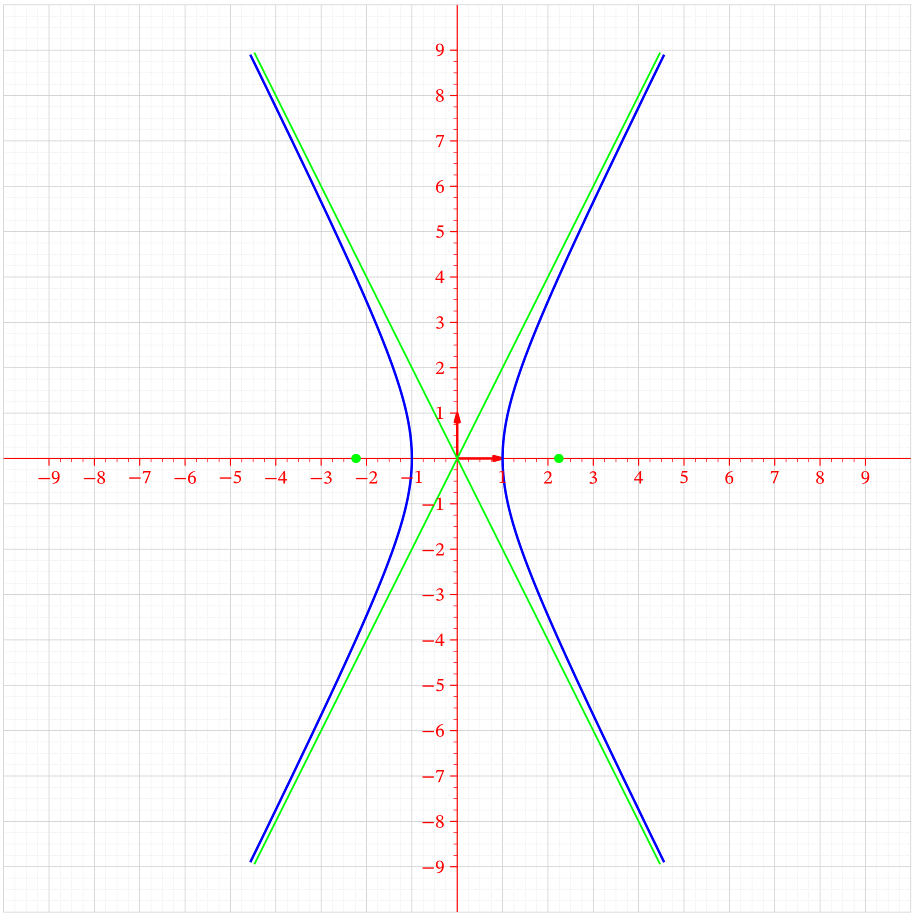
els focus,

$$(c, 0) = (\sqrt{5}, 0) \qquad \text{i} \qquad (-c, 0) = (-\sqrt{5}, 0)\,;$$

i les asímptotes,

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{2}{1}x = 2x \qquad \text{i} \qquad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{2}{1}x = -2x\,.$$

I el gràfic és



Exercici 45

Trobeu el centre i els focus de la hipèrbola d'equació següent i representeu–ho gràficament:

$$4x^2 - 9y^2 - 24x + 18y - 9 = 0\,.$$

Solució

L'equació anterior es pot escriure en la forma

$$4(x-3)^2 - 36 - 9(y+1)^2 + 9 - 9 = 0$$

o bé

$$4(x-3)^2 - 9(y+1)^2 = 36\,,$$

que equival a

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1\,.$$

En conseqüència, el centre és el punt $(3, 1)$.

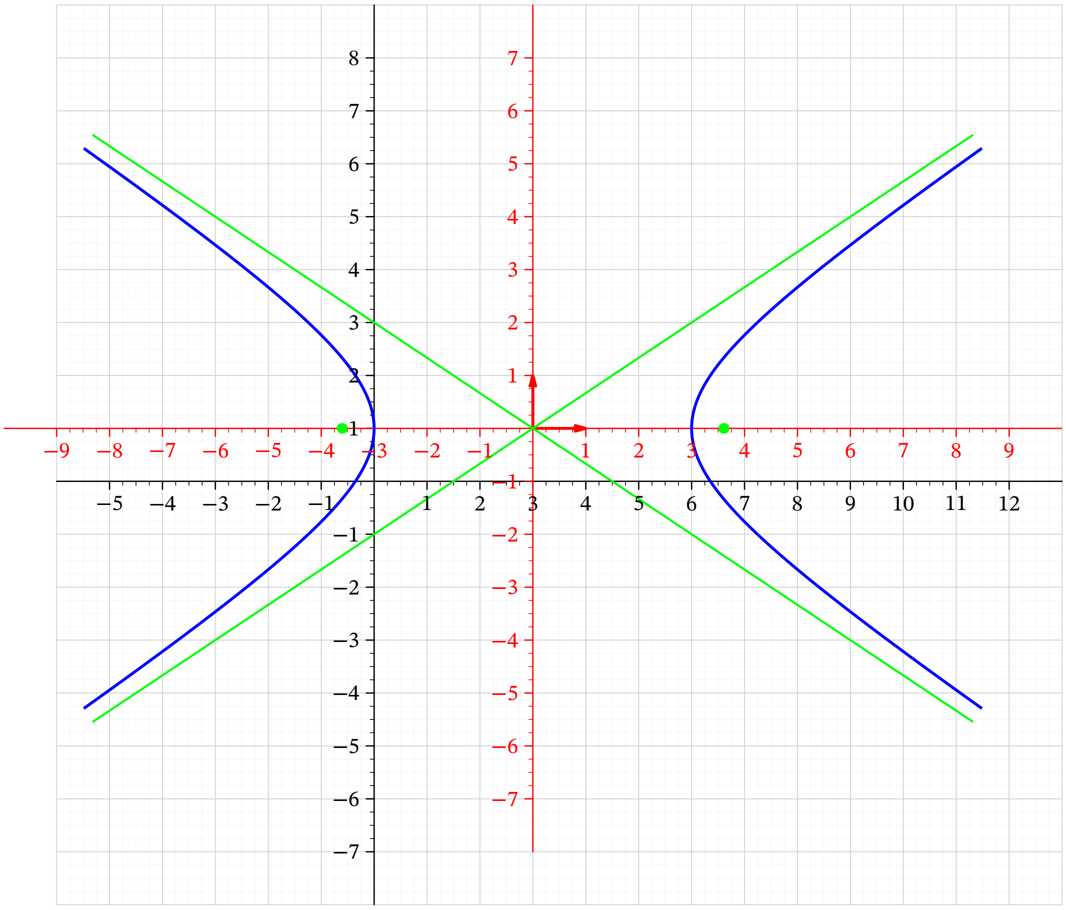
A més, tenim que el semieix real és $a = \sqrt{9} = 3$ i el semieix imaginari $b = \sqrt{4} = 2$ i, per tant, es té que la semidistància focal és

$$c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,.$$

I tenim, doncs, que els focus són

$$(3,1) + \sqrt{13}(1,0) = (3+\sqrt{13},1) \qquad \text{i} \qquad (3,1) - \sqrt{13}(1,0) = (3-\sqrt{13},1)\,.$$

I el gràfic és



Exercici 46

Trobeu el centre i els focus de l'el·lipse d'equació següent i representeu–ho gràficament:

$$5x^2 + 2y^2 - 20x + 12y + 8 = 0\,.$$

Solució

L'equació anterior es pot escriure en la forma

$$5(x-2)^2 - 20 + 2(y+3)^2 - 18 + 8 = 0$$

o bé

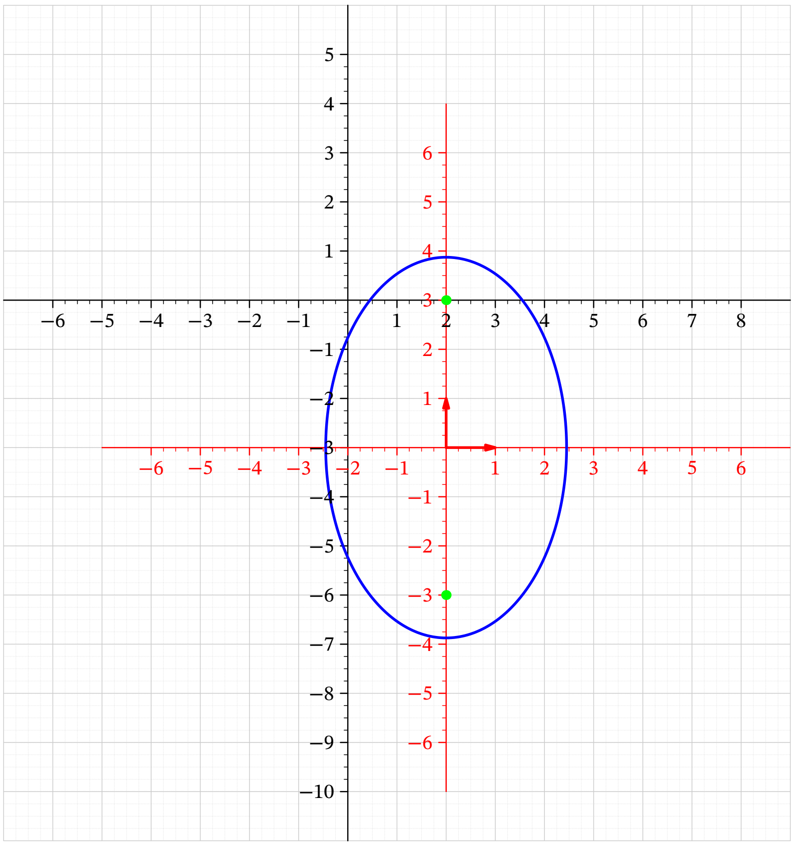
$$5(x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 30\,,$$

que equival a

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+3)^2}{15} = 1\,.$$

En conseqüència, el centre és el punt $(2,-3)$.

A més, tenim que el semieix major és $a = \sqrt{15}$ i el menor $b = \sqrt{6}$ i, per tant, es té que la semidistància focal és
$$c = \sqrt{\sqrt{15}^2 - \sqrt{6}^2} = 3\,.$$
I tenim, doncs, que els focus són
$$(2, -3) + 3(0, 1) = (2, 0) \qquad \text{i} \qquad (2, -3) - 3(0, 1) = (2, -6)\,.$$
I el gràfic és



Exercici 47

Determineu el focus, el vèrtex i la recta directriu de la paràbola següent i representeu–ho gràficament:
$$y^2 + 8x - 4y + 12 = 0\,.$$

Solució

L'equació anterior es pot escriure en la forma
$$(y - 2)^2 - 4 + 8x + 12 = 0$$
o bé
$$(y - 2)^2 + 8(x + 1) = 0\,,$$
que equival a
$$x + 1 = -\frac{(y - 2)^2}{8}\,.$$
En conseqüència, el vèrtex és el punt $(-1, 2)$.

A més, tenim que el paràmetre és $p = \frac{8}{2} = 4$ i, per tant, el focus és el punt

$$(-1, 2) - \frac{4}{2}(1, 0) = (-3, 2)\,.$$

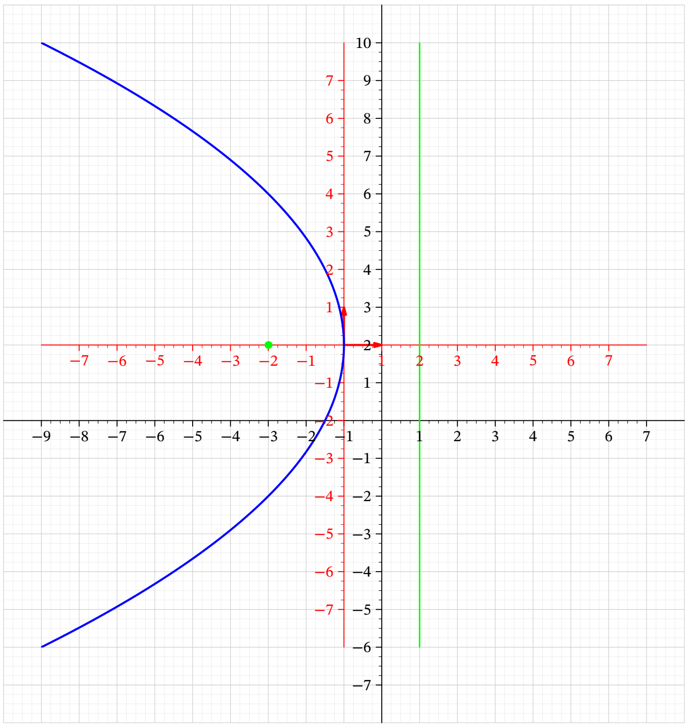
I la recta directriu, per la seva banda, té equació

$$x + 1 - \frac{4}{2} = 0\,,$$

és a dir,

$$x = 1\,.$$

I el gràfic és



Exercici 48

Donada la quàdrica d'equació

$$40x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 240x - 20y + 4z + 298 = 0\,,$$

completeu quadrats i determineu el seu tipus i el seu vèrtex o centre.

Solució

L'equació anterior es pot escriure en la forma

$$40(x-3)^2 - 360 - 5(y+2)^2 + 20 - 2(z-1)^2 + 2 + 298 = 0$$

o bé

$$40(x-3)^2 - 5(y+2)^2 - 2(z-1)^2 = 40\,,$$

que equival a

$$(x-3)^2 - \frac{(y+2)^2}{8} - \frac{(z-1)^2}{20} = 1\,.$$

En conseqüència, es tracta d'un hiperboloide de dues fulles amb centre el punt

$$(3, -2, 1)\,.$$

Exercici 49

Donada la quàdrica d'equació

$$5x^2 + 4z^2 - 30x - 200y - 16z + 461 = 0\,,$$

completeu quadrats i determineu el seu tipus i el seu vèrtex o centre.

Solució

L'equació anterior es pot escriure en la forma

$$5(x-3)^2 - 45 + 4(z-2)^2 - 16 - 200y + 461 = 0$$

o bé

$$5(x-3)^2 + 4(z-2)^2 - 200y + 400 = 0\,,$$

és a dir,

$$5(x-3)^2 + 4(z-2)^2 - 200(y-2) = 0\,,$$

que equival a

$$y - 2 = \frac{(x-3)^2}{40} + \frac{(z-2)^2}{50}\,.$$

En conseqüència, es tracta d'un paraboloide el·líptic amb vèrtex el punt

$$(3, 2, 2)\,.$$

Exercici 50

Donada l'esfera d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z + 8 = 0\,,$$

trobeu l'equació dels dos plans tangents a l'esfera i paral·lels al pla $x + y + 2z = 1$.

Solució

L'equació del dos plans que busquem ha de ser de la forma

$$x + y + 2z + D = 0$$

i la condició de que un pla sigui tangent a una esfera és que la distància del centre del pla a l'esfera coincideixi amb el radi de l'esfera.

Completant quadrats podem trobar el centre i el radi de l'esfera. Així, de

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z + 8 = 0\,,$$

tenim que

$$x^2 + 6x + y^2 + 4y + z^2 - 2z + 8 = 0\,,$$

és a dir,

$$(x+3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 + 8 = 0$$

o, el que és el mateix,

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 6\,.$$

Per tant, el seu centre és el punt $(-3, -2, 1)$ i el seu radi $r = \sqrt{6}$.

Ara hem d'imposar que la distància del centre de l'esfera als plans d'equació

$$x + y + 2z + D = 0$$

sigui igual a $\sqrt{6}$. Tenint en compte la fórmula de la distància d'un punt a un pla

$$d(p, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,,$$

tindrem que

$$\frac{|-3 + (-2) + 2 \cdot 1 + D|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}$$

i, en conseqüència

$$|D - 3| = 6\,,$$

que equival a que

$$D - 3 = 6 \qquad \text{i} \qquad D - 3 = -6\,.$$

Llavors, tenim que $D = 9$ i $D = -3$ i, per tant, les equacions dels dos plans són

$$x + y + 2z = -9 \qquad \text{i} \qquad x + y + 2z = 3\,.$$

Exercici 51

Analitzeu si el sistema següent és referència rectangular de P_3 i, en cas afirmatiu, determineu la seva orientació:

$$\left\{(-1, 1, 2);\ \frac{1}{13}(-3, 4, 12), \frac{1}{13}(12, -3, 4), \frac{1}{13}(4, 12, -3)\right\}.$$

Solució

És referència rectangular perquè la seva base és ortonormal ja que

$$(-3, 4, 12) \cdot (12, -3, 4) = (-3, 4, 12) \cdot (4, 12, -3) = (12, -3, 4) \cdot (4, 12, -3) = 0$$

i

$$\left\|\frac{1}{13}(-3, 4, 12)\right\| = \left\|\frac{1}{13}(12, -3, 4)\right\| = \left\|\frac{1}{13}(4, 12, -3)\right\| = \frac{1}{13} \cdot 13 = 1\,.$$

I és positiva ja que

$$\det\left[\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -3 & 12 & 4 \\ 4 & -3 & 12 \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix}\right] = \left(\frac{1}{13}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 12 & 4 \\ 4 & -3 & 12 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2197} \cdot (-27 + 64 + 1728 + 144 + 144 + 144) = 1 > 0\,.$$

Exercici 52

Calculeu i representeu gràficament les coordenades del punt $(5, 2)$ en la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{(0, -3);\ \frac{1}{5}(3, -4), \frac{1}{5}(4, 3)\right\}.$$

Solució

Com que la referència és rectangular, utilitzem el mètode de càlcul específic per a aquest cas.

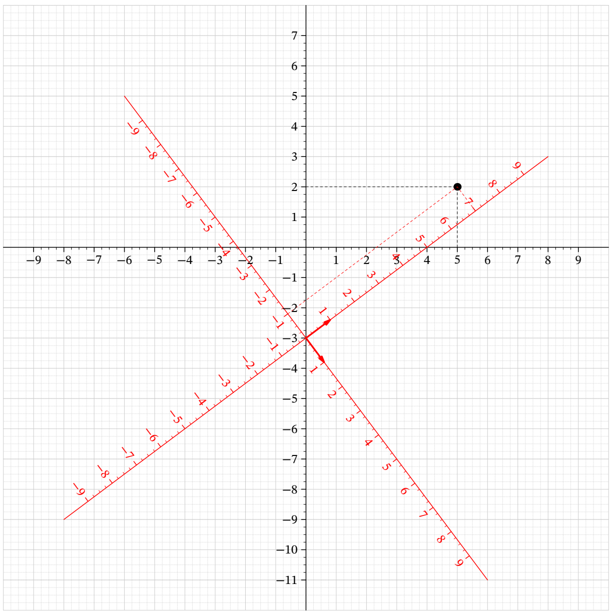
En primer lloc, el vector que uneix l'origen de coordenades i el punt donat és el

$$(5, 2) - (0, -3) = (5, 5).$$

I les coordenades són les components del vector en la base de la referència que, en ser rectangular, són

$$\left((5, 5) \cdot \frac{1}{5}(3, -4), (5, 5) \cdot \frac{1}{5}(4, 3)\right) = (-1, 7).$$

I el gràfic és



Exercici 53

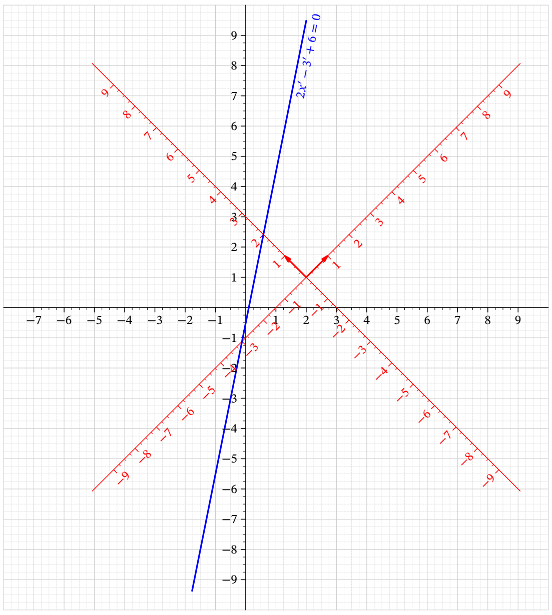
Representeu gràficament la recta que en la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{(2, 1);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\right\}$$

té equació $2x' - 3y' + 6 = 0$.

Solució

El gràfic és



Exercici 54

Determineu l'angle que formen la recta i el pla d'equacions respectives

$$\frac{x'+2}{2}=\frac{y'-3}{-1}=\frac{z'}{2} \qquad \text{i} \qquad -x'+2y'+2z'=-1$$

en la referència $\mathcal{R}'=\left\{(2,-1,3);\ \frac{1}{3}(-1,2,2),\ \frac{1}{3}(2,-1,2),\ \frac{1}{3}(2,2,-1)\right\}$.

Solució

Encara que hi ha conceptes que depenen del producte escalar, com que la referència és rectangular, treballem en la referència $\mathcal{R}$' com si fos la canònica.

En primer lloc, el vector director de la recta i l'associat al pla són els de components $(2,-1,2)$ i $(-1,2,2)$ en la base de la referència, respectivament.

I com que

$$(2,-1,2)\cdot(-1,2,2)=0\,,$$

es dedueix que la recta i el pla són paral·lels i, en particular, l'angle que formen és

$$\alpha=0\,.$$

Exercici 55

Trobeu l'angle entre la recta i el pla que tenen equacions respectives

$$\frac{x'+6}{2}=\frac{y'-8}{-5}=\frac{z'-7}{5} \qquad \text{i} \qquad x'-y'+2z'=1$$

en la referència $\mathcal{R}'=\{(1,-2,3);\ (1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Solució

Com que la referència no és rectangular i hi ha conceptes que depenen del producte escalar, fem un canvi de referència a la referència canònica.

El vector director de la recta és el de components $(2,-5,,5)$ en la base de la referència, és a dir, el

$$2(1,1,1)-5(1,1,0)+5(1,0,0)=(2,-3,2)\,.$$

I, d'altra banda, tenim que el canvi de referència de $\mathcal{R}_c$ a $\mathcal{R}'$ ve donat per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right],$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

I llavors, substituint a l'equació del pla, tenim que

$$z-3-(y-z+5)+2(x-y-6)=1$$

o, el que és el mateix,

$$2x-3y+2z=21\,.$$

I com que el vector director de la recta i l'associat al pla són iguals, es dedueix que la recta i el pla són perpendiculars i, en particular, que formen un angle de $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Exercici 56

Determineu la distància que hi ha entre el punt $(1,2)$ i la recta que té equació

$$x'-3y'=0$$

en la referència $\mathcal{R}'=\{(0,-1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\}$. Representeu–ho gràficament.

Solució

Encara que hi ha conceptes que depenen del producte escalar, com que la referència és rectangular, treballem directament en la referència $\mathcal{R}'$ com si fos la canònica.

Així, podem aplicar la fórmula habitual de la distància d'un punt a una recta en el pla treballant amb la mateixa referència $\mathcal{R}'$. El que farem primer, per tant, és calcular les coordenades del punt anterior en la referència $\mathcal{R}'$. Tenim que el vector que uneix l'origen de coordenades amb el punt donat és el

$$(1,2)-(0,-1)=(1,3)\,.$$

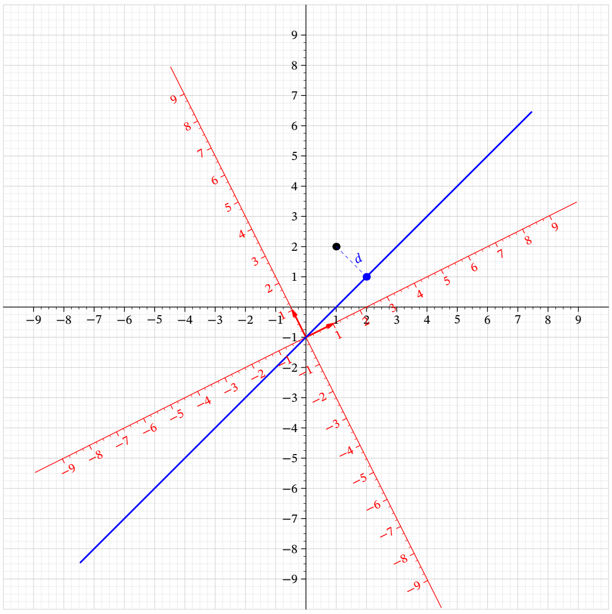
I aquest té components en la base ortonormal de la referència $\mathcal{R}'$

$$\left((1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),(1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right)=\left(\sqrt{5},\sqrt{5}\right).$$

Per tant, la distància ve donada per

$$\frac{|\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{2}\,.$$

I el gràfic és



Exercici 57

Calculeu la distància del punt $(1,2)$ a la recta d'equació

$$x'+2y'=0$$

en la referència $\mathcal{R}'=\{(3,1);\,(1,3),(2,1)\}$.

Solució

Com que la referència no és rectangular i hi ha conceptes que depenen del producte escalar, fem un canvi de referència a la referència canònica.

Tenim que el canvi de referència de $\mathcal{R}_c$ a $\mathcal{R}'$ ve donat per

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right],$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5\\-8/5\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

I llavors, substituint a l'equació de la recta

$$x'+2y'=0\,,$$

tenim

$$\frac{1}{5}(-x+2y+1)+2\cdot\frac{1}{5}(3x-y-8)=0$$

o, el que és el mateix,

$$x-3=0\,.$$

Per tant, la distància és

$$\frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2\,.$$

Exercici 58

Els vectors de la base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ compleixen que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 3$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 2$. Donats la recta R d'equació

$$4x' - 3y' = 1$$

en la referència $\mathcal{R}' = \{o; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ i el punt $p = (5, -3)_{\mathcal{R}'}$, calculeu la distància del punt p a la recta R.

Solució

Com que la referència $\mathcal{R}'$ no és rectangular, no podem aplicar cap fórmula per al càlcul de la distància. Així doncs, hem de trobar la projecció ortogonal de p sobre la recta R.

En primer lloc, el vector director de la recta R és $\vec{u} = (3, 4)_{\mathcal{B}'}$ i hem de trobar un vector $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$. Si posem $\vec{v} = (a, b)_{\mathcal{B}'}$, tindrem que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

on G és la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'$. Per tant,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 5a + 5b\,.$$

Aleshores, és evident que el vector $\vec{v} = (1, -1)_{\mathcal{B}'}$ és perpendicular a $\vec{u}$ i que la recta perpendicular a R que passa pel punt $p = (5, -3)_{\mathcal{R}'}$ té equació implícita

$$x' + y' = 2\,.$$

Per calcular la projecció ortogonal del punt p sobre la recta R hem de trobar la intersecció entre aquestes dues rectes

$$\left.\begin{aligned} 4x' - 3y' &= 1 \\ x' + y' &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $x' = 1$, $y' = 1$, per tant $p' = (1, 1)_{\mathcal{R}'}$ és la projecció ortogonal del punt p sobre la recta R i la distància de p a R és igual a la distància entre p i p'.

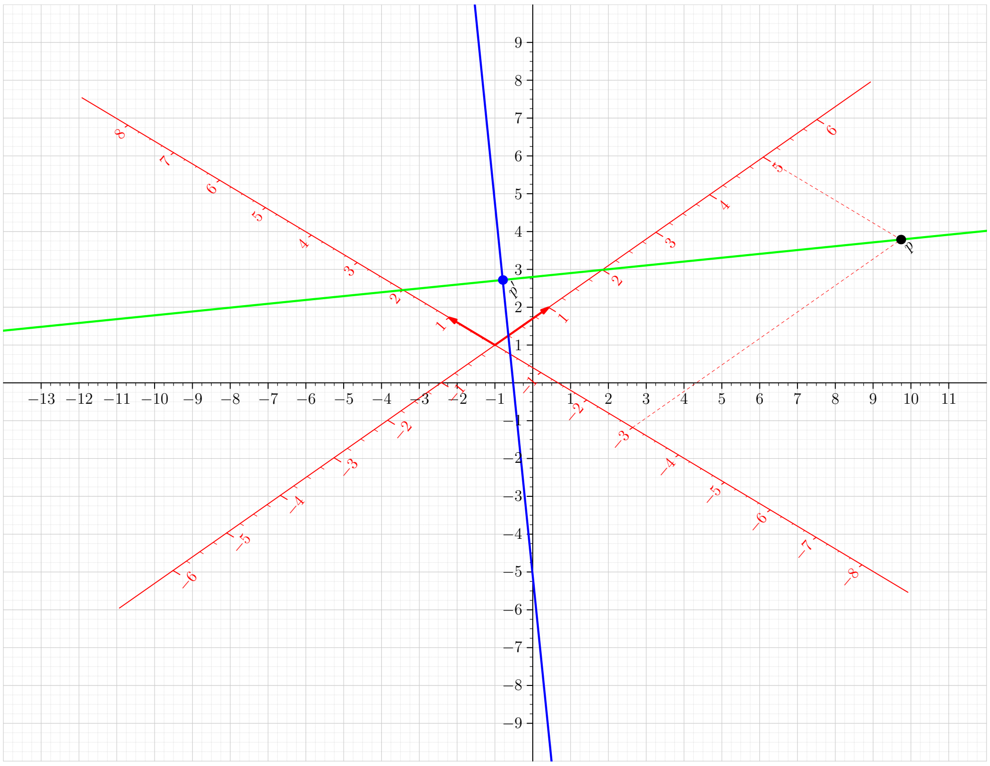
I tenint llavors en compte que $\overrightarrow{pp'} = (1, 1) - (5, -3) = (-4, 4)$, tindrem que

$$\overrightarrow{pp'} \cdot \overrightarrow{pp'} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 112\,.$$

Per tant,

$$d(p, R) = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}\,.$$

Finalment, una possible representació gràfica és



Exercici 59

Trobeu l'equació en la referència $\mathcal{R}' = \left\{(2,-3);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$ de la cònica d'equació

$$x^2 + y^2 - 2xy - 26x - 6y + 9 = 0\,.$$

Solució

Les equacions del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i, substituint a l'equació de l'enunciat, tenim

$$\begin{gathered} \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right)^2 + \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\right)^2 - 2 \cdot \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right) \cdot \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\right) \\ -26 \cdot \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right) - 6 \cdot \left(2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\right) + 9 = 0 \end{gathered}$$

que, agrupant i simplificant, queda

$$2x'^2 - 16\sqrt{2}y' = 0$$

o, el que és el mateix,

$$y' = \frac{x'^2}{8\sqrt{2}}$$

i, en particular, es té que és una paràbola.

Exercici 60

Trobeu l'equació en la referència $\mathcal{R}' = \left\{(4,-3,2);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)\right\}$ de la quàdrica d'equació

$$3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 6xz + 6yz - 6x - 2y + 22z + 3 = 0\,.$$

Solució

Les equacions del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

que, substituint a l'equació de l'enunciat i agrupant i simplificant, queda

$$-\frac{x'^{\,2}}{4} - \frac{y'^{\,2}}{2} + \frac{z'^{\,2}}{16} = 1$$

i, per tant, és un hiperboloide de dues fulles.

Capítol 5

Transformacions lineals i afins

5.1 Transformacions lineals

Exercici 1

Escriviu la part escalar i la part vectorial del quaternió

$$-4 + 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}\,.$$

Solució

Les parts escalar i vectorial són, respectivament,

$$-4 \qquad \text{i} \qquad 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}\,.$$

Exercici 2

Calculeu la suma dels quaternions

$$-3 + 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k} \qquad \text{i} \qquad -1 - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}\,.$$

Solució

Tenim que

$$(-3 + 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}) + (-1 - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}) = -4 + \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}\,.$$

Exercici 3

Calculeu el producte de l'escalar -3 i el quaternió

$$4 - 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}\,.$$

Solució

El producte de l'escalar pel quaternió és

$$-3(4 - 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}) = -12 + 6\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} + 15\vec{k}\,.$$

Exercici 4

Calculeu el producte dels quaternions

$$1 - 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k} \qquad \text{i} \qquad -1 + 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\,.$$

Solució

Com que el producte escalar i el producte vectorial de les parts vectorials dels quaternions són, respectivament,

$$(-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}) \cdot (3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) = -9 - 2 + 8 = -3 \qquad \text{i} \qquad \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} - 3\vec{k}\,,$$

el producte és

$$(1 - 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}) \cdot (-1 + 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) =$$
$$1 \cdot (-1) - (-3) + (-1)(-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}) + 1(3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) + (-8\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} - 3\vec{k}) = 2 - 2\vec{\imath} - 21\vec{\jmath} - \vec{k}\,.$$

Exercici 5

Calculeu el conjugat del quaternió

$$-2 + \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}\,.$$

Solució

El conjugat és

$$-2 - \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}\,.$$

Exercici 6

Calculeu la norma del quaternió

$$2 - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\,.$$

Solució

La norma és

$$\| 2 - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k} \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}\,.$$

Exercici 7

Calculeu la imatge del vector $(-2, 3, 4)$ i les antiïmatges dels vectors $(-2, 3, 2)$ i $(0, 3, 1)$ de la transformació lineal T de V_3 donada per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

La imatge del vector $(-2,3,4)$ surt de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i és, doncs,

$$T(-2,3,4) = (-1,-14,1).$$

I les antiïmatges són els vectors (x,y,z) tals que

$$T(x,y,z) = (-2,3,2) \qquad \text{i} \qquad T(x,y,z) = (0,3,1),$$

que venen donats per

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I podem resoldre aquests dos sistemes lineals simultàniament:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Aleshores, obtenim que el primer sistema és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$\left.\begin{aligned} x &= -4z - 3 \\ y &= z - 2 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, tenim que les antiïmatges del vector $(-2,3,2)$ formen el conjunt

$$T^{-1}(-2,3,2) = \{(-4z-3, z-2, z) \in V_3 \ : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

I, en canvi, el segon sistema és incompatible, la qual cosa vol dir que el vector $(0,3,1)$ no té antiïmatges.

Exercici 8

Donada la transformació lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

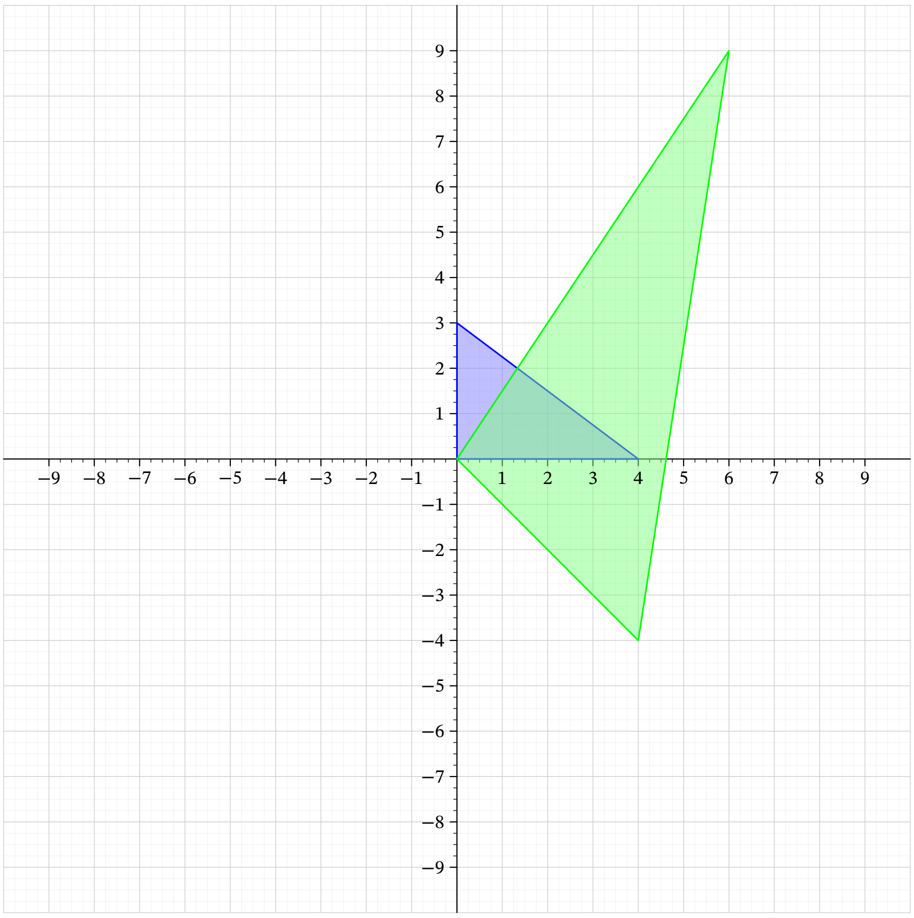
representeu en què es transforma el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(4,0)$ i $(0,3)$.

Solució

Tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el gràfic és



Exercici 9

Trobeu la matriu en la base canònica de la transformació lineal T de V_3 definida per

$$\left.\begin{aligned} T(1,1,1) &= (-1,1,-3) \\ T(1,2,2) &= (0,1,-4) \\ T(1,2,3) &= (1,4,-7) \end{aligned}\right\} .$$

Solució

Si A és la matriu de T en la base canònica s'ha de verificar que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix},$$

que equival a l'equació matricial

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&4\\-3&-4&-7\end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim que la matriu A és

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&4\\-3&-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&4\\-3&-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-3&3\\-2&2&-3\end{pmatrix}.$$

Exercici 10

Calculeu la matriu respecte de la base $\mathcal{B}' = \{(2,-1,3),(2,1,2),(1,-1,2)\}$ de la transformació lineal T de V_3 definida per

$$T(x,y,z) = (2x+3y-z, x-y+4z, x-3y+2z)\,.$$

Solució

En primer lloc, la matriu associada a T respecte de la base canònica $\mathcal{B}_c$ és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llavors, calculem la matriu associada a T respecte de la base $\mathcal{B}'$ amb l'esquema de canvi de base següent:

$$\begin{tikzcd}
(V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "A"] & (V_3,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_3,\mathcal{B}') \\
X' \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A' = C^{-1}AC"'] & X \arrow[r, mapsto] & \bar{X} \arrow[r, mapsto] & \bar{X}'
\end{tikzcd}$$

on A' és la matriu de T en la base $\mathcal{B}'$ i C la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu associada a T respecte de la base $\mathcal{B}'$ és

$$\begin{aligned}
A' = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 15 & 9 & 10 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -71 & -7 & -56 \\ 28 & 7 & 21 \\ 84 & 5 & 67 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercici 11

Trobeu la representació en la base canònica de la transformació lineal que consisteix en un escalat de factor 1 en la direcció $(-3,3,1)$, un de factor 1 en la direcció $(1,-3,-2)$ i un de factor 3 en la direcció $(1,-2,-1)$.

Solució

Llavors, la representació de la transformació lineal en la base $\mathcal{B}' = \{(-3,3,1),(1,-3,-2),(1,-2,-1)\}$ és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

I llavors, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$
\begin{tikzcd}
(V_3,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3,\mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1}"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}
$$

podem obtenir la seva matriu en la base canònica:

$$A = CA'C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 12 \\ 12 & 21 & 24 \\ 6 & 10 & -11 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la representació de la transformació lineal en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 12 \\ 12 & 21 & 24 \\ 6 & 10 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercici 12

Calculeu la matriu associada en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2),(2,1)\}$ del gir vectorial d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Solució

En primer lloc, si notem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ tenim que

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{i} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Per tant, la matriu d'aquest gir vectorial en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I llavors, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$
\begin{tikzcd}
(V_2,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_2,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "A"] & (V_2,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_2,\mathcal{B}') \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A' = C^{-1}AC"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}
$$

podem obtenir la seva matriu en la base $\mathcal{B}'$:

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Exercici 13

Siguin T l'escalat de factors 4 en la direcció de les x i 3 en la direcció de les y i G el gir de 120°.

(a) Trobeu la representació en la base canònica de la transformació lineal que consisteix en aplicar primer l'escalat i després el gir.

(b) Representeu en què es transforma el rectangle de vèrtexs $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ i $(-2,1)$.

Solució

(a) La representació en la base canònica de l'escalat i el gir són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de la transformació lineal donada és

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència, la representació en la base canònica de la transformació lineal resultant és

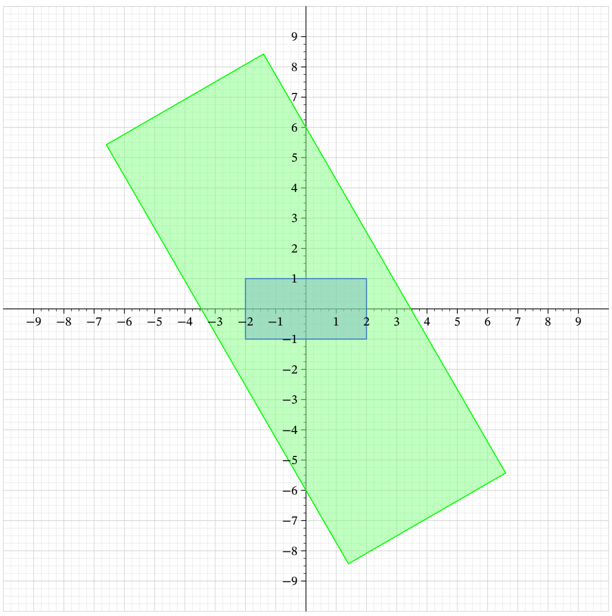
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Tenim, doncs, que

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+3\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3}+3 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8+3\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3}+3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8-3\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3}-3 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8-3\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3}-3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el gràfic és



Exercici 14

Trobeu la representació en la base canònica de la rotació vectorial amb ordenació dels eixos ZXZ i angles respectius d'Euler

$$\psi = \frac{3\pi}{2}, \qquad \theta = \frac{5\pi}{4} \qquad \text{i} \qquad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Solució

La matriu és

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per tant, la representació en la base canònica de la rotació és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercici 15

Trobeu la matriu en la base canònica de la rotació vectorial d'angle $\frac{\pi}{2}$ al voltant del vector $(1,0,1)$

(a) directament;

(b) fent servir quaternions.

Solució

(a) Donada la base $\{(1,0,1)\}$ de l'eix de rotació, tenim que el seu pla ortogonal ve donat per l'equació implícita

$$x + z = 0.$$

Llavors, un possible vector d'aquest pla és el $(0,1,0)$ d'on, fent el producte vectorial dels dos anteriors

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1),$$

s'obté que una base ortonormal positiva és

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1.0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \right\}.$$

Llavors, com que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tenim que la matriu de la rotació vectorial en aquesta base $\mathcal{B}'$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I tenint en compte que la matriu de canvi de base és ortogonal, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$\begin{tikzcd}
(V_3,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}=C^t"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3,\mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A=CA'C^{-1}=CA'C^t"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

podem obtenir la seva matriu en la base canònica

$$A = CA'C^{-1} = CA'C^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si notem $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tenim que $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ i, per tant,

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aleshores, el quaternió és

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}(1,0,1)$$

i, per tant, resulta que

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = 0 \qquad \text{i} \qquad d = \frac{1}{2}.$$

I llavors, substituint, s'obté la matriu

$$\begin{pmatrix} 2a^2+2b^2-1 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & 2a^2+2c^2-1 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & 2a^2+2d^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 16

Trobeu la representació en la base canònica de la transformació lineal de V_3 que consisteix en aplicar successivament una rotació de 60° al voltant de l'eix de les x, una rotació de 30° al voltant de l'eix de les y i una rotació de 120° al voltant de l'eix de les z. Trobeu també l'eix de la combinació de les tres rotacions.

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de les tres rotacions anteriors són

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de la combinació de totes tres és

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 5 \\ 6 & 1 & 3\sqrt{3} \\ -4 & 6 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència, la representació en la base canònica de la transformació lineal és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 5 \\ 6 & 1 & 3\sqrt{3} \\ -4 & 6 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Aleshores, per trobar l'eix de rotació plantegem el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 5 \\ 6 & 1 & 3\sqrt{3} \\ -4 & 6 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que té solució $y = (6 + 3\sqrt{3})x$ i $z = (7 + 4\sqrt{3})x$. Per tant, l'eix de rotació és el generat pel vector

$$(1, 6 + 3\sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}).$$

Exercici 17

Donada la rotació representada en la base canònica per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

trobeu l'eix i l'angle de rotació i el quaternió que la defineix.

Solució

En primer lloc, per trobar l'eix de rotació plantegem el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que té solució $x = -z$ i $y = z$. Per tant, l'eix de rotació és el generat pel vector

$$(-1, 1, 1).$$

Per trobar l'angle de rotació, tenim en primer lloc que

$$\cos\alpha = \frac{-1 + \text{traça } T}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

i l'angle serà, doncs, 90° o 270°.

Per saber exactament quin dels dos és escollim un vector qualsevol que no sigui múltiple del vector de gir tal com, per exemple, el $(1,0,0)$ i calculem la seva imatge

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aleshores, calculem el determinant del vector de gir, del que hem escollit i de la seva imatge

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

i, com que és negatiu, tenim que el sinus de l'angle és també negatiu i, en conseqüència, l'angle de gir és

$$270°\,.$$

I, finalment, el quaternió ve donat per

$$\cos 135° + \sin 135° \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{3} + (-1,1,1)\right)$$

i és, doncs, el

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3} - \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})\,.$$

Exercici 18

Determineu si la transformació lineal T de V_2 que en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2),(1,1)\}$ ve donada per la matriu

$$A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

és un gir vectorial i, en cas afirmatiu, calculeu l'angle de gir.

Solució

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal, farem un canvi de base a la base canònica:

$$\begin{tikzcd}
(V_2,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_2,\mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_2,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_2,\mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1}"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, com que la base canònica és ortonormal i la matriu en aquesta base és del tipus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

amb $a^2 + b^2 = 1$, s'obté que T és, efectivament, un gir vectorial.

Finalment, es té que

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i, en conseqüència, s'obté que T és el gir vectorial d'angle

$$\frac{\pi}{4}.$$

Exercici 19

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 representada en la base canònica per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

és una rotació vectorial i, en cas afirmatiu, calculeu els angles d'Euler i el vector i l'angle de gir

(a) directament;

(b) fent servir quaternions.

Solució

(a) En primer lloc, per veure si T és una rotació només cal comprovar que la matriu A és ortogonal

$$A^tA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i que el seu determinant és 1

$$\left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0 + 2 + 2 + 2 + 2 - 0) = 1.$$

Aleshores, els angles d'Euler venen donats, respectivament, per

$$\begin{aligned}\psi &= \arctan 2\,(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \frac{7\pi}{4}\,;\\ \theta &= \arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,;\\ \phi &= \arctan 2\,(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \frac{5\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Finalment, els vectors de l'eix de rotació són els que verifiquen que

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 & 0\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2+F_1\\ F_3\sim F_3+\sqrt{2}F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right); \qquad \left.\begin{array}{r} x = y\\ z = 0\end{array}\right\}.$$

Per tant, el vector de gir és el

$$(1,1,0)\,.$$

A més, tenim que

$$\cos\alpha = \frac{\text{traça } T - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

i l'angle de gir és, doncs, $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$.

Llavors, per saber quin d'aquests és escollim un vector qualsevol que no sigui múltiple del vector de gir tal com, per exemple, el $(0,0,1)$ i calculem la seva imatge, que ve donada per la tercera columna de A i és, doncs, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. Aleshores

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} < 0\,,$$

i es té que $\sin\alpha < 0$ i, en conseqüència, l'angle de gir és

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}\,.$$

(b) Si sumem les igualtats

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 - 1 &= \frac{1}{2}\\ 2a^2 + 2c^2 - 1 &= \frac{1}{2}\\ 2a^2 + 2d^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

obtenim

$$6a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 3 = 1\,.$$

I com que podem escollir el signe d'un dels valors, prenent $a \geq 0$ per exemple i, ja que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\,,$$

obtenim que

$$4a^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Llavors, substituint a les primeres igualtats, s'obté que

$$b = \pm\frac{1}{2}\,, \qquad c = \pm\frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad d = 0\,.$$

I substituint ara $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $d = 0$ a la matriu de la fórmula i igualant a la matriu de l'enunciat, es té que

$$\begin{pmatrix} 2b^2 & -2bc & \sqrt{2}\,c \\ 2bc & 2c^2 & -\sqrt{2}\,b \\ -\sqrt{2}\,c & \sqrt{2}\,b & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad c = -\frac{1}{2}\,.$$

En conseqüència, el quaternió és

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,,$$

del que es dedueix que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i, per tant, que l'angle de gir ve donat per

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{3\pi}{2}\,.$$

5.2 Transformacions afins

Exercici 20

Trobeu la imatge del punt $(0,1,-2)$ i les antiïmatges del punt $(3,1,-1)$ per la transformació afí T de P_3 representada en la referència canònica per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

la imatge del punt $(0, 1-2)$ és

$$T(0,1,-2) = (5,3,-3)\,.$$

I les antiïmatges del punt $(3, 1, -1)$ surten de

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 - 4F_1 \\ F_3 \sim F_1 + F_3}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \left.\begin{array}{l} x = y + 1 \\ z = -4y - 4 \end{array}\right\}.$$

Per tant, tenim que les antiïmatges del punt $(3, 1, -1)$ formen el conjunt

$$T^{-1}(3, 1, -1) = \{(y + 1, y, -4y - 4) \in P_3 \ : \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercici 21

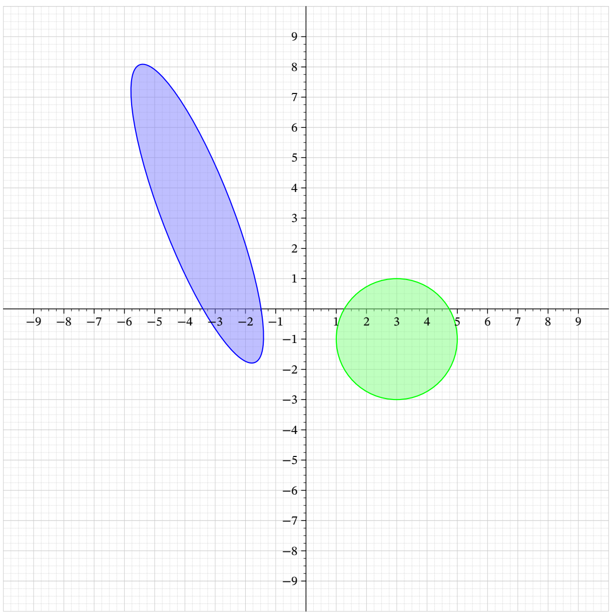
Donada la transformació afí

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

representeu gràficament la figura que s'ha transformat en la circumferència de centre $(3, -1)$ i radi 2.

Solució

El gràfic és



Exercici 22

La representació en la referència canònica d'una transformació afí de P_2 és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

representeu gràficament en què es transforma el rectangle de vèrtexs $(1, 0)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$ i $(0, 1)$ i trobeu els punts fixos d'aquesta transformació.

Solució

Per al punt $(1, 0)$, tenim que el seu transformat és

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

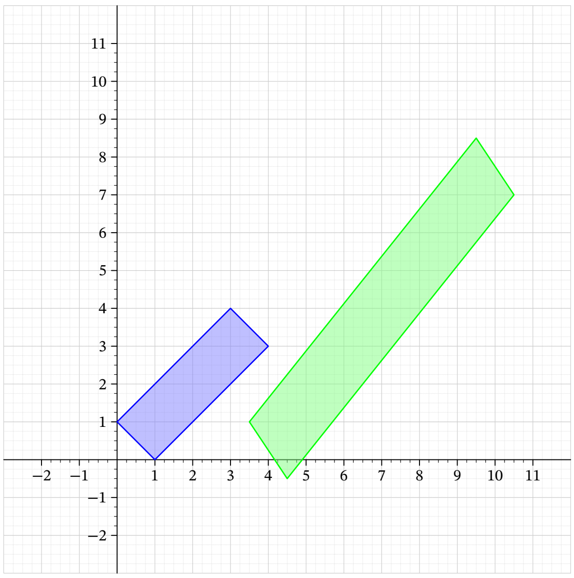
és a dir,

$$\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I procedint anàlogament amb els altres tres punts $(4, 3)$, $(3, 4)$ i $(0, 1)$ obtenim els transformats respectius

$$\left(\frac{21}{2}, 7\right), \qquad \left(\frac{19}{2}, \frac{17}{2}\right) \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

i el gràfic és, en conseqüència,



I per trobar els punts fixos plantegem el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que té solució $x = -14$ i $y = 8$. Per tant, l'únic punt fix és el

$$(-14, 8).$$

Exercici 23

Sabent que la transformació afí T del pla transforma els punts

$$p = (-1, 1)\,, \qquad q = (2, -2) \qquad \text{i} \qquad r = (-2, -2)$$

en els punts

$$T(p) = (4, 1)\,, \qquad T(q) = (-14, 7) \qquad \text{i} \qquad T(r) = (-6, 11)\,,$$

trobeu l'expressió de T en la referència canònica.

Solució

La representació serà de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aleshores tindrem que

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B + A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \end{pmatrix} = B + A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix} = B + A \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Si restem la segona igualtat menys la primera, obtenim que

$$\begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

De manera semblant, si restem la tercera menys la primera, tenim que

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu A ha de complir que

$$A \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta igualtat és immediat aïllar la matriu A,

$$A = \begin{pmatrix} -18 & -10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & -10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finalment, substituim la matriu A a la igualtat corresponent a $T(-1, 1) = (4, 1)$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'on resulta que

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la transformació afí és la donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercici 24

Calculeu la representació en la referència $\mathcal{R}' = \{(-1,2);\ (2,1),(3,2)\}$ de la transformació afí T de P_2 representada en la referència canònica per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Solució

En primer lloc, l'expressió del canvi de referència de la referència $\mathcal{R}'$ a la referència canònica $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

que, en termes de coordenades de les imatges, és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

I això equival a

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right].$$

Així doncs, la representació de T en la referència $\mathcal{R}'$ és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Exercici 25

Calculeu la representació en la referència

$$\mathcal{R}' = \{(1,2);\ (1,2),(2,1)\}$$

del gir afí d'angle $\frac{3\pi}{4}$ al voltant del punt $(1,-1)$.

Solució

En primer lloc, ens ocupem del gir vectorial corresponent. Així, si notem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ tenim que

$$\cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{i} \qquad \sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Per tant, la matriu d'aquest gir vectorial en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} \cos\,\alpha & -\sin\,\alpha \\ \sin\,\alpha & \cos\,\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I llavors, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$\begin{tikzcd}
(V_2, \mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_2, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "A"] & (V_2, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_2, \mathcal{B}') \\
X' \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A' = C^{-1}AC"'] & X \arrow[r, mapsto] & \bar{X} \arrow[r, mapsto] & \bar{X}'
\end{tikzcd}$$

amb

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

podem obtenir la seva matriu en la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} A' = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'altra banda, les coordenades del punt $(1, -1)$ en la referència $\mathcal{R}'$ surten de

$$(1, -1) = (1, 2) + x'(1, 2) + y'(2, 1)$$

o, equivalentment,

$$(0, -3) = x'(1, 2) + y'(2, 1)\,.$$

Per tant, hem de resoldre aquest sistema lineal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Llavors, és clar que la seva solució és $x' = -2$ i $y' = 1$ i, en conseqüència, tenim que

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

és a dir, la representació del gir afí en la referència canònica és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 - \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Exercici 26

Siguin G_1 el gir de 120° al voltant del punt $(2,3)$ i G_2 el gir de $-30°$ al voltant del punt $(1,-3)$.

(a) Trobeu la representació en la referència canònica de la transformació afí que consisteix en aplicar primer G_2 i després G_1.

(b) Representeu en què es transforma el triangle de vèrtexs $(5,1)$, $(3,8)$ i $(-2,-1)$.

(c) Trobeu un punt fix de la transformació afí.

Solució

(a) En primer lloc, la representació de G_1 en la referència canònica és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6+3\sqrt{3} \\ 9-2\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

I, anàlogament, la de G_2 és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5-\sqrt{3} \\ -5+3\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Per tant, si primer apliquem G_2 i després G_1, tindrem la transformació afí

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6+3\sqrt{3} \\ 9-2\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5-\sqrt{3} \\ -5+3\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right],$$

que queda

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+6\sqrt{3} \\ 10-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Tenim, doncs, que la imatge del punt $(5,1)$ és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+6\sqrt{3} \\ 10-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+6\sqrt{3} \\ 20-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

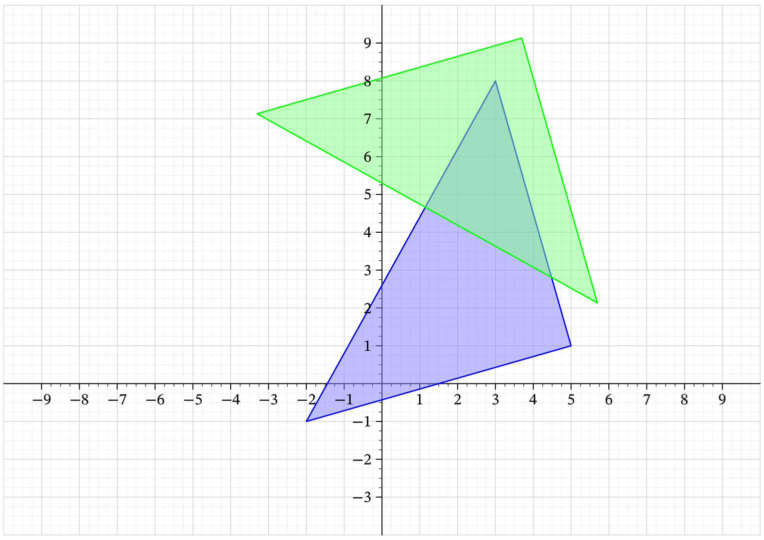
De manera semblant, els transformats dels punts $(3,8)$ i $(-2,-1)$ són

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+6\sqrt{3} \\ 10-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -17+6\sqrt{3} \\ 26-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+6\sqrt{3} \\ 10-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+6\sqrt{3} \\ 6-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aleshores, el gràfic és



(c) Per trobar un punt fix de la transformació afí plantegem el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+6\sqrt{3} \\ 10-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que té solució $x = \frac{7\sqrt{3}-11}{4}$ i $y = \frac{5\sqrt{3}+9}{4}$. Per tant, el punt fix és el

$$\frac{1}{4}(-11+7\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}).$$

Exercici 27

Determineu la representació en la referència canònica de la rotació afí d'angle $\frac{3\pi}{2}$ al voltant de la recta que passa pel punt $(1,-1,2)$ i té vector director $(0,-1,0)$.

Solució

En primer lloc, ens ocupem de la rotació vectorial corresponent.

Donada la base $\{(0,-1,0)\}$, un possible vector ortogonal és el $(1,0,0)$ i fent el producte vectorial de tots dos

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

obtenim la base ortonormal positiva

$$\mathcal{B}' = \{(0,-1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

Aleshores, si notem $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, tenim que

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{i} \qquad \sin\alpha = -1.$$

Per tant, la matriu de la rotació vectorial en aquesta base $\mathcal{B}'$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I tenint en compte que la matriu de canvi de base és ortogonal, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$\begin{tikzcd}
(V_3, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1} = C^t"] & (V_3, \mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_3, \mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3, \mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1} = CA'C^t"] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

podem obtenir la seva matriu en la base canònica

$$A = CA'C^{-1} = CA'C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conseqüència, el transformat del punt (x, y, z) és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

i la representació en la referència canònica de la rotació afí és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercici 28

Trobeu la representació en la referència canònica del moviment helicoïdal d'angle $\frac{\pi}{4}$ al voltant de la recta que passa pel punt $(1, 1, -1)$ i té vector director $(1, -1, 0)$ amb vector de translació $(2, -2, 0)$.

Solució

Ens ocupem, en primer lloc, de la rotació vectorial corresponent.

És clar que un vector ortogonal al $(1, -1, 0)$ és el $(0, 0, 1)$. Per tant, fent el producte vectorial de tots dos

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0),$$

obtenim que una base ortonormal positiva és

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) \right\}.$$

I aleshores, si notem $\alpha = \frac{\pi}{4}$ tenim que

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Per tant, tenim que la matriu de la rotació vectorial en aquesta base $\mathcal{B}'$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I tenint en compte que la matriu de canvi de base és ortogonal, mitjançant la fórmula del canvi de base

$$\begin{tikzcd}
(V_3, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1} = C^t"] & (V_3, \mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_3, \mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3, \mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1} = CA'C^t"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

amb

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

obtenim la matriu en la base canònica

$$A = CA'C^{-1} = CA'C^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el transformat del punt (x, y, z) és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i la representació en la referència canònica del moviment helicoïdal és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5-\sqrt{2} \\ -3-\sqrt{2} \\ -4+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & -2 \\ -2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercici 29

Determineu si la transformació afí T de $\mathbb{P}_2$ que en la referència $\mathcal{R}' = \{(0, -1); (3, 1), (5, 2)\}$ té representació

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

és un gir afí i, en cas afirmatiu, determineu el centre i l'angle de gir.

Solució

En primer lloc, ens ocupem de la transformació lineal associada a la transformació afí T.

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal, farem un canvi de base a la base canònica:

$$\begin{tikzcd}
(V_2, \mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_2, \mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_2, \mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_2, \mathcal{B}_c) \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1}"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, com que la matriu en aquesta base és del tipus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

amb $a^2 + b^2 = 1$, s'obté que és un gir vectorial, efectivament.

I com que la base canònica és positiva, es té que

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i és, doncs, el gir vectorial d'angle

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

Per tant, T és un gir afí i podem determinar el centre de gir tenint en compte que és un punt fix:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

que, matricialment, es pot expressar

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 18 - \sqrt{2} & 29 & 0 \\ -10 & -16 - \sqrt{2} & 0 \end{array} \right).$$

I com que aquest sistema lineal és homogeni i clarament compatible determinat, la solució és $x' = y' = 0$ i el punt fix és el de coordenades $(0, 0)$ en la referència $\mathcal{R}'$, és a dir, el seu origen:

$$(0, -1).$$

Per tant, T és el gir afí d'angle $\dfrac{7\pi}{4}$ al voltant del punt

$$(0, -1).$$

Exercici 30

Determineu si la transformació afí T de P_3 que en la referència canònica té representació

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

és una rotació afí o un moviment helicoïdal i, en cas afirmatiu, trobeu un punt i el vector director de la recta de gir, l'angle de gir i, si és necessari, el vector de translació.

Solució

En primer lloc, ens ocupem de la transformació lineal associada a la transformació afí T.

Per veure si és una rotació només cal comprovar que aquesta matriu A és ortogonal

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i que el seu determinant és 1

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Llavors, els vectors de l'eix de rotació són els que verifiquen que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2\sim F_1+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \left.\begin{array}{r} -x-y=0 \\ -2y=0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}.$$

Per tant, el vector de gir és el $(0, 0, 1)$.

A més, tenim que

$$\cos\alpha = \frac{\text{traça } T - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0\,.$$

I prenent el vector $(1, 0, 0)$ per exemple, tenim que la seva imatge ve donada per la primera columna de la matriu A i és, doncs, $(0, 1, 0)$. I com que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0\,,$$

es té que $\sin\alpha > 0$ i, en conseqüència, l'angle de gir és

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,.$$

Per tant, és una rotació afí o un moviment helicoïdal.

I per determinar quin dels dos és, plantegem l'equació

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que, matricialment, es pot expressar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)_{F_2 \sim F_1 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right),$$

que és compatible quan

$$\beta = 0\,,$$

la qual cosa significa que es tracta d'una rotació afí. I, a més, les solucions són $x = -2$, $y = 1$ i z qualsevol i podem agafar el punt $(-2, 1, 0)$ per exemple.

Tenim, en definitiva, que T és la rotació afí d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ al voltant del punt i el vector respectius

$$(2, -1, 0) \qquad \text{i} \qquad (0, 0, 1)\,.$$

Exercici 31

Determineu si la transformació afí T de P_3 que en la referència canònica té representació

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

és una rotació afí o un moviment helicoïdal i, en cas afirmatiu, trobeu un punt i el vector director de la recta de gir, l'angle de gir i, si és necessari, el vector de translació.

Solució

En primer lloc, ens ocupem de la transformació lineal associada a la transformació afí T.

Per veure si T és una rotació només cal comprovar que aquesta matriu A és ortogonal

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i que el seu determinant és 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Llavors, els vectors de l'eix de rotació són els que verifiquen que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, el que és el mateix,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_1+F_3}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_2+F_3}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x=y=z\,.$$

Per tant, una possible solució és $x = y = z = 1$ i el vector de gir és el

$$(1,1,1)\,.$$

A més, tenim que

$$\cos\,\alpha = \frac{\text{traça } T-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

I prenent per exemple el vector $(1,0,0)$, tenim que la seva imatge ve donada per la primera columna de la matriu A i és, doncs, $(0,0,1)$. I com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0\,,$$

es té que $\sin\,\alpha < 0$ i, per tant, l'angle de gir és

$$\alpha = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Per tant, és una rotació afí o un moviment helicoïdal.

I per determinar quin dels dos és, plantegem l'equació

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o sigui,

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & 0 & \beta-3 \\ 0 & -1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & -1 & \beta-1 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_1+F_3}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & 0 & \beta-3 \\ 0 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & -1 & 2\beta-4 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_3+F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 1 & 0 & \beta-3 \\ 0 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta-4 \end{array}\right).$$

I aquest sistema és compatible si, i només si,

$$\beta = \frac{4}{3}\,.$$

Per tant, en ser aquest valor no nul, obtenim que es tracta d'un moviment helicoïdal.

Llavors, pel valor $\beta = \frac{4}{3}$ d'abans queda

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & -1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = z + \frac{1}{3}$, $y = z - \frac{4}{3}$ amb z qualsevol. Per tant, un punt p i el vector $\overrightarrow{p\,f(p)}$ són, respectivament,

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \qquad \text{i} \qquad \frac{4}{3}(1,1,1)\,.$$

En conseqüència, T és el moviment helicoïdal d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ respecte del punt i el vector respectius

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \qquad \text{i} \qquad (1,1,1)$$

amb vector de translació $\dfrac{4}{3}(1,1,1)$.

Capítol 6

Diagonalització

6.1 Diagonalització

Exercici 1

Analitzeu si la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la.

Solució

El polinomi característic és
$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2\,.$$
Llavors, les seves solucions són
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1+i\,; \\ 1-i\,. \end{cases}$$
I com que té arrels complexes, es dedueix que la matriu no és diagonalitzable sobre els reals.

Exercici 2

Analitzeu si la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la.

Solució

El polinomi característic és
$$\begin{vmatrix} -x & -2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = -x(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4\,.$$

Llavors, les seves solucions són

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \begin{cases} 2\,; \\ 2\,. \end{cases}$$

I com que el valor propi és doble, es dedueix que no és diagonalitzable per no ser múltiple de la identitat.

Exercici 3

Analitzeu si la matriu següent és diagonalitzable

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i, en cas afirmatiu, expresseu-la en funció de la matriu diagonal i de la de canvi de base.

Solució

El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)(1-x) - 8 = x^2 - 4x + 3 - 8 = x^2 - 4x - 5\,.$$

LLavors, les seves solucions són

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 5\,; \\ -1\,. \end{cases}$$

I com que els valors propis són simples, es dedueix que la matriu sí és diagonalitzable. I tenim:

$$S_5 : \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad -2x + 4y = 0 \implies x = 2y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y) = (2y, y) = y(2, 1)$$

i una base de S_5 és $\{(2,1)\}$.

$$S_{-1} : \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim 2F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad 4x + 4y = 0 \implies x = -y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y) = (-y, y) = y(-1, 1)$$

i una base de S_{-1} és $\{(-1,1)\}$. I, en conseqüència,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Exercici 4

Analitzeu si la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la.

Solució

El polinomi característic és
$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 \,.$$

I com que el valor propi és triple i la matriu no és múltiple de la identitat, no és diagonalitzable.

Exercici 5

Analitzeu si la matriu
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la.

Solució

En primer lloc, el polinomi característic és
$$\begin{vmatrix} -2-x & 5 & -1 \\ -1 & 4-x & -1 \\ 4 & -3 & 3-x \end{vmatrix}_{F_1 \sim F_1 - F_2} = \begin{vmatrix} -1-x & 1+x & 0 \\ -1 & 4-x & -1 \\ 4 & -3 & 3-x \end{vmatrix}_{C_2 \sim C_1 + C_2} = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & -1 \\ 4 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$$
$$= (-1-x)\begin{vmatrix} -3-x & -1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = -(x+1)\left[(3-x)^2+1\right] = -(x+1)(x^2-6x+10)\,.$$

Llavors, les solucions del darrer terme són
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}\,.$$

I com que té arrels complexes, es dedueix que la matriu no és diagonalitzable sobre els reals.

Exercici 6

Analitzeu si la matriu
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la.

Solució

Comencem calculant el polinomi característic:

$$\begin{vmatrix} -1-x & 3 & 12 \\ 1 & 2-x & -3 \\ -1 & 1 & 6-x \end{vmatrix} = (-1-x)(2-x)(6-x)+9+12+12(2-x)+3(-1-x)-3(6-x)$$
$$= -x^3+7x^2-4x-12+9+12-12x+24-3x-3+3x-18 = -x^3+7x^2-16x+12\,.$$

Trobem la primera arrel amb la regla de Ruffini i les altres dues resolent l'equació de segon grau obtinguda:

$$\begin{array}{c|rrrr} & -1 & 7 & -16 & 12 \\ 2 & & -2 & 10 & -12 \\ \hline & -1 & 5 & -6 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 3\,; \\ 2\,. \end{cases}$$

Calculem primer la dimensió de S_2 per saber si és diagonalitzable. Tenim:

$$S_2 : \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 3F_2+F_1 \\ F_3 \sim 3F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En conseqüència, com que el rang de la matriu anterior és 2, es té que

$$\dim S_2 = 3-2 = 1$$

i, com que el valor propi era doble, es dedueix que la matriu no és diagonalitzable.

Exercici 7

Analitzeu si la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal i la matriu de canvi de base.

Solució

En primer lloc, el polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 1-x & 6 & 6 \\ 2 & 3-x & 4 \\ -2 & -5 & -6-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)(-6-x)-60-48+12(3-x)+20(1-x)-12(-6-x)$$
$$= (3-4x+x^2)(-6-x)-108+36-12x+20-20x+72+12x$$
$$= -18+21x-2x^2-x^3+20-20x = -x^3-2x^2+x+2\,.$$

Trobem la primera arrel amb la regla de Ruffini i les altres dues per la fórmula de l'equació de segon grau:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & -1 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1\,; \\ -2\,. \end{cases}$$

Per tant, els valors propis són 1, -1 i -2. I en ser tots tres simples, es dedueix que la matriu és diagonalitzable. I tenim:

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ -2 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 2F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ 6y + 6z &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2x + 2(-z) + 4z &= 0 \\ y &= -z \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x &= -z \\ y &= -z \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$$

i una base de S_1 és $\{(-1, -1, 1)\}$.

$$S_{-1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim -F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 2F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 6y + 6z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2x + 6(-z) + 6z &= 0 \\ y &= -z \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -z \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$$

i una base de S_{-1} és $\{(0, -1, 1)\}$.

$$S_{-2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + 2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 6y + 6z &= 0 \\ 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 3x + 6z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x &= -2z \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (-2z, 0, z) = z(-2, 0, 1)$$

i una base de S_{-2} és $\{(-2, 0, 1)\}$. I, en conseqüència,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 8

Analitzeu si la matriu següent és diagonalitzable

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&0&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

i, en cas afirmatiu, expresseu la matriu diagonal en funció de la matriu A i de la de canvi de base.

Solució

En primer lloc, el polinomi característic és

$$\begin{vmatrix}1/2-x&-1&-1/2\\-1/2&-x&-1/2\\-1/2&-1&1/2-x\end{vmatrix}_{C_1\sim C_1+C_2+C_3}=\begin{vmatrix}-1-x&-1&-1/2\\-1-x&-x&-1/2\\-1-x&-1&1/2-x\end{vmatrix}_{\substack{F_2\sim F_2-F_1\\F_3\sim F_3-F_1}}=\begin{vmatrix}-1-x&-1&-1/2\\0&1-x&0\\0&0&1-x\end{vmatrix}$$
$$=-(x+1)(x-1)^2\,.$$

Per tant, tenim el valor propi doble 1 i el valor propi simple -1.

Calculem primer la dimensió de S_1 per determinar si és diagonalitzable. Tenim:

$$S_1\,:\,\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-2&-1&0\\-1&-2&-1&0\\-1&-2&-1&0\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-F_1\\F_3\sim F_3-F_1}}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-2&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

I com que el rang d'aquesta matriu és 1, es té que

$$\dim\,S_1=3-1=2$$

i la matriu és, doncs, diagonalitzable. Aleshores, resolent el sistema anterior, queda $x=-2y-2z$, d'on

$$(x,y,z)=(-2y-2z,y,z)=y(-2,1,0)+z(-2,0,1)$$

i una base de S_1 és $\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$.

$$S_{-1}\,:\,\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-2&3&0\end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 3F_2+F_1\\F_3\sim 3F_3+F_1}}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&-1&0\\0&4&-4&0\\0&-8&8&0\end{array}\right)_{F_3\sim F_3+2F_2}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&-1&0\\0&4&-4&0\\0&0&0&0\end{array}\right);$$

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y-z=0\\4y-4z=0\end{array}\right\}\implies\left.\begin{array}{r}3x-2z-z=0\\y=z\end{array}\right\}\implies\left.\begin{array}{r}x=z\\y=z\end{array}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x,y,z)=(z,z,z)=z(1,1,1)$$

i una base de S_{-1} és $\{(1,1,1)\}$. I, en conseqüència,

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&-2&2\\-2&2&4\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Exercici 9

Analitzeu si la transformació lineal T de V_2 que en la base canònica té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)(4-x)+1 = x^2-6x+8+1 = x^2-6x+9\,.$$

Llavors, les seves solucions són

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \begin{cases} 3\,; \\ 3\,. \end{cases}$$

Per tant, no és diagonalitzable per tenir valor propi doble i no ser la matriu múltiple de la identitat.

Exercici 10

Analitzeu si la transformació lineal T de V_2 que en la base $\mathcal{B}' = \{(2,-3),(1,4)\}$ té matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)+3 = x^2-3x+2+3 = x^2-3x+5\,.$$

Llavors, les seves solucions són

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}\,.$$

I com que les arrels són complexes, s'obté que la transformació lineal no és diagonalitzable.

Exercici 11

Analitzeu si la transformació lineal T de V_2 que en la base canònica té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)-6 = x^2-3x+2-6 = x^2-3x-4\,.$$

Llavors, les seves solucions són

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}4\,;\\-1\,.\end{cases}$$

I com que els valors propis són simples, es dedueix que la matriu sí és diagonalitzable.

Calculem els vectors propis:

$$S_4 : \left(\begin{array}{cc|c}-3 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 0\end{array}\right)_{F_2\sim F_2+F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right); \qquad -3x+2y=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2y}{3}\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x,y)=\left(\frac{2y}{3},y\right)=y\left(\frac{2}{3},1\right)$$

i una base de S_4 és $\{(\frac{2}{3},1)\}$ o bé $\{(2,3)\}$.

$$S_{-1} : \left(\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{array}\right)_{F_2\sim 2F_2-3F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right); \qquad 2x+2y=0 \quad\Longrightarrow\quad x=-y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x,y)=(-y,y)=y(-1,1)$$

i una base de S_{-1} és $\{(-1,1)\}$.

En conseqüència, T diagonalitza en la base de vectors propis

$$\{(2,3),(-1,1)\}$$

i té matriu asociada diagonal en aquesta base

$$D=\begin{pmatrix}4 & \\ & -1\end{pmatrix}.$$

Exercici 12

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 que en la base canònica té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -2\\ 8 & 7 & 4\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$\begin{aligned}p(x)&=\begin{vmatrix}-3-x & -3 & -2\\ 8 & 7-x & 4\\ -4 & -3 & -1-x\end{vmatrix}\\ &=(-3-x)(7-x)(-1-x)+48+48-8(7-x)+12(-3-x)+24(-1-x)\\ &=-x^3+3x^2+25x+21+40-28x-60=-x^3+3x^2-3x+1\,.\end{aligned}$$

La primera arrel la trobem pel mètode de Ruffini i les altres dues resolent l'equació de segon grau obtinguda:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & & -1 & 2 & -1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \begin{cases} 1\,; \\ 1\,. \end{cases}$$

Per tant, no és diagonalitzable per tenir valor propi triple i no ser la matriu múltiple de la identitat.

Exercici 13

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 que en la base canònica té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -6 & 3-x & -7 \\ -2 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -2 & -1-x \end{vmatrix}$$
$$= (3-x)\,[(1-x)(-1-x)+2] = -(x-3)(x^2+1)\,.$$

I les solucions del darrer terme són

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}\,.$$

Llavors, el polinomi característic té arrels complexes i, per tant, la transformació lineal no és diagonalitzable.

Exercici 14

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 que en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 0 \\ -4 & -x & -1 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (-2-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$
$$= (-2-x)\,[-x(2-x)+1] = -(x+2)(x^2-2x+1)\,.$$

I les solucions del darrer terme són

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \begin{cases} 1\,; \\ 1\,. \end{cases}$$

Per tant, tenim el valor propi doble 1 i el valor propi simple -2.

Comencem calculant la dimensió de S_1 per saber si és diagonalitzable:

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim 3F_2 - 4F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - 2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim F_3 - F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

I com que el rang és 2, es té que

$$\dim S_1 = 3 - 2 = 1$$

i, en conseqüència, la transformació lineal no és diagonalitzable.

Exercici 15

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 que en la base canònica té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -8 & -6 & -3 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ -8 & -6-x & -3 \\ 8 & 8 & 5-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(-6-x)(5-x) + 24 + 64 + 8(-6-x) + 24(1-x) - 8(5-x) \\ &= -x^3 + 31x - 30 + 24 + 64 - 8x - 48 - 24x + 24 + 8x - 40 = -x^3 + 7x - 6\,. \end{aligned}$$

La primera arrel la trobem pel mètode de Ruffini i les altres dues resolent l'equació de segon grau obtinguda:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2\,; \\ -3\,. \end{cases}$$

Per tant, els tres valors propis són simples i, en conseqüència, la transformació lineal és diagonalitzable.

Calculem els vectors propis:

$$S_1: \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & -7 & -3 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_3} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -8 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_1+F_3}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} 8x+8y+4z&=0 \\ -y-z&=0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 8x+8(-z)+4z&=0 \\ y&=-z \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x&=\frac{z}{2} \\ y&=-z \end{aligned}\right\}.$$

Llavors

$$(x,y,z) = \left(\frac{z}{2}, -z, z\right) = z\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$

i una base de S_1 és $\{(\frac{1}{2}, -1, 1)\}$ o, equivalentment, $\{(1, -2, 2)\}$.

$$S_2: \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -3 & 0 \\ 8 & 8 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2-8F_1 \\ F_3 \sim F_3+8F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} -x-y-z&=0 \\ 5z&=0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -x-y&=0 \\ z&=0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x&=-y \\ z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x,y,z) = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$$

i una base de S_2 és $\{(-1, 1, 0)\}$.

$$S_{-3}: \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & -3 & -3 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2+2F_1 \\ F_3 \sim F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3+2F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} 4x-y-z&=0 \\ -5y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 4x-(-z)-z&=0 \\ y&=-z \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x&=0 \\ y&=-z \end{aligned}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x,y,z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$$

i una base de S_{-3} és $\{(0, -1, 1)\}$.

En definitiva, T diagonalitza en la base de vectors propis

$$\mathcal{B}' = \{(1, -2, 2), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$$

i té matriu associada diagonal en aquesta base

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 16

Analitzeu si la transformació lineal T de V_3 que en la base $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ té la matriu associada següent és o no diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & -8 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic és

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 4 \\ -4 & 3-x & -8 \\ -2 & 2 & -5-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(3-x)(-5-x) - 32 - 32 + 8(3-x) + 16(1-x) - 8(-5-x) \\ &= -x^3 - x^2 + 17x - 15 - 32 - 32 + 24 - 8x + 16 - 16x + 40 + 8x = -x^3 - x^2 + x + 1\,. \end{aligned}$$

La primera arrel la trobem pel mètode de Ruffini i les altres dues resolent l'equació de segon grau obtinguda:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \begin{cases} -1\,; \\ -1\,. \end{cases}$$

Per tant, els valors propis de la transformació lineal són 1 (simple) i -1 (doble).

Comencem calculant la dimensió de S_{-1} per saber si és diagonalitzable:

$$S_{-1}: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \sim 2F_1 + F_2 F_3 \\ F_3 \sim F_1 + F_3}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

I com que el rang és 1, es té que

$$\dim\, S_{-1} = 3 - 1 = 2$$

i, en conseqüència, la transformació lineal és diagonalitzable.

Llavors, resolent l'anterior sistema lineal tenim:

$$2x' - 2y' + 4z' = 0 \quad \Longrightarrow \quad x' = y' - 2z'$$

i es té que

$$(x',y',z') = (y' - 2z', y', z') = y'(1,1,0) + z'(-2,0,1)\,.$$

Per tant, una base de S_{-1} és la formada pels vectors de components $(1,1,0)$ i $(-2,0,1)$ en la base $\mathcal{B}'$:

$$1(1,0,0) + 1(1,1,0) + 0(1,1,1) = (2,1,0) \qquad \text{i} \qquad -2(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1) = (-1,1,1)\,.$$

I ara fem el mateix amb S_{-1}:

$$S_1 : \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \leftrightarrow F_1} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 2F_3 - F_1}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{array}{r} -4x' - 2y' - 8z' = 0 \\ -2y' + 4z' = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} -4x' - 4z' - 8z' = 0 \\ y' = 2z' \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} x' = 3z' \\ y' = 2z' \end{array}\right\}.$$

Per tant, es té que

$$(x', y', z') = (3z', 2z', z') = z'(3, 2, 1)$$

i una base de S_2 és la formada pel vector de components $(3, 2, 1)$ en la base $\mathcal{B}'$:

$$3(1, 0, 0) + 2(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1) = (6, 3, 1)\,.$$

En definitiva, T diagonalitza en la base de vectors propis

$$\mathcal{B}'' = \{(2, 1, 0), (-1, 1, 1), (6, 3, 1)\}$$

i té matriu associada diagonal en aquesta base

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 17

La transformació lineal T de V_3 té matriu en la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix}$$

i diagonalitza en la base $\mathcal{B}' = \{(2, -2, -1), (2, -1, -1), (1, -2, -1)\}$. Determineu els coeficients a, b i c i la matriu diagonal corresponent.

Solució

La matriu diagonal serà de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

I la matriu del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores s'ha de complir que $A = CDC^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

o, el que és el mateix, $AC = CD$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -2-a & -a & -3-a \\ 2-b & 3-b & -b \\ 4-c & 3-c & 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta & \gamma \\ -2\alpha & -\beta & -2\gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

que, igualant coeficients, es converteix en el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} -2-a &= 2\alpha \\ 2-b &= -2\alpha \\ 4-c &= -\alpha \\ -a &= 2\beta \\ 3-b &= -\beta \\ 3-c &= -\beta \\ -3-a &= \gamma \\ -b &= -2\gamma \\ 3-c &= -\gamma \end{aligned}\right\},$$

la solució del qual és $a = -6$, $b = 6$, $c = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ i $\gamma = 3$.

Per tant, tenim que els coeficients de la matriu són

$$a = -6\,, \quad b = 6 \quad \text{i} \quad c = 6\,;$$

i la matriu diagonal,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 18

La transformació lineal diagonalitza en la base $\mathcal{B}' = \{(-1,-1,-1),(1,2,1),(2,1,1)\}$, i el vector $(-3,-1,-2)$ es transforma en el vector $(-4,0,-2)$. Trobeu la representació de T en la base canònica.

Solució

La matriu diagonal serà de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

i la matriu del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base canònica és

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores s'ha de complir que $A = CDC^{-1}$, és a dir,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

o, el que és el mateix,

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 2\gamma \\ -\alpha & 2\beta & \gamma \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & -\alpha + \beta & 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ -\alpha + \gamma & -\alpha + 2\beta & 3\alpha - 2\beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma & -\alpha + \beta & 3\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Finalment, com que el vector $(-3, -1, -2)$ es transforma en el vector $(-4, 0, -2)$, es compleix que

$$\begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & -\alpha + \beta & 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ -\alpha + \gamma & -\alpha + 2\beta & 3\alpha - 2\beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma & -\alpha + \beta & 3\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} -2\alpha + \beta - 2\gamma &= -4 \\ -2\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -2\alpha + \beta - \gamma &= -2 \end{aligned} \right\}.$$

Ara resolem aquest sistema d'equacions pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

d'on és immediat que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i $\gamma = 2$ i que, en substituir a la matriu A, obtenim que la representació de T en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6.2 Diagonalització ortogonal

Exercici 19

Donada la matriu simètrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

(a) diagonalitzeu-la i expresseu la matriu diagonal en funció de la matriu A i de la matriu de canvi de base;

(b) diagonalitzeu-la ortogonalment i expresseu la matriu diagonal en funció de la matriu A i de la matriu ortogonal de canvi de base.

Solució

(a) En primer lloc, com que la matriu és simètrica llavors és diagonalitzable.

Els valors propis surten del polinomi característic:

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} 5-x & -2 & 2 \\ -2 & 2-x & 4 \\ 2 & 4 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (5-x)(2-x)^2 - 16 - 16 - 4(2-x) - 4(2-x) - 16(5-x) \\ &= (5-x)(4-4x+x^2) - 32 - 8 + 4x - 8 + 4x - 80 + 16x \\ &= -x^3 + 9x^2 - 24x + 20 - 128 + 24x \\ &= -x^3 + 9x^2 - 108\,. \end{aligned}$$

Calculem la primera arrel d'aquest polinomi mitjançant la regla de Ruffini i les altres per la fórmula de l'equació de segon grau:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 9 & 0 & -108 \\ -3 & & 3 & -36 & 108 \\ \hline & -1 & 12 & -36 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array} \qquad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{-2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-12 \pm 0}{-2} = \begin{cases} 6\,; \\ 6\,. \end{cases}$$

Per tant, tenim el valor propi doble 6 i el valor propi simple -3.

Calculem els vectors propis:

$$S_6 : \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + 2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad -x-2y+2z = 0 \implies x = -2y+2z\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (-2y + 2z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

i una base de S_6 és $\{(-2,1,0),(2,0,1)\}$.

I el vector propi de valor propi -3 el podem calcular fent el producte vectorial dels dos vectors anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, -2)\,.$$

Tenim, doncs, que

$$\{(-2,1,0),(2,0,1),(1,2,-2)\}$$

és una base de vectors propis i, per tant, la matriu diagonal i la matriu de canvi de base són, respectivament,

$$D = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, obtenim que $D = C^{-1}AC$:

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Com que la matriu és simètrica, sabem que és ortogonalment diagonalitzable.

I com que els vectors que formen la base de S_6 no són ortogonals hem d'aplicar el mètode de Gram-Schmidt:

$\vec{v}_1{}' = (-2, 1, 0)\,;$

$$\vec{v}_2{}' = (2,0,1) - \frac{(2,0,1)\cdot(-2,1,0)}{(-2,1,0)\cdot(-2,1,0)}(-2,1,0) = (2,0,1) + \frac{4}{5}(-2,1,0) = \frac{1}{5}(2,4,5) \simeq (2,4,5)\,.$$

Per tant, normalitzant aquests vectors, obtenim que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5), \frac{1}{3}(1,2,-2) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis i, en particular, que la matriu diagonal i la matriu ortogonal de canvi de base són, respectivament,

$$D = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Finalment, obtenim que $D = P^{-1}AP = P^tAP$:

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Exercici 20

Diagonalitzeu ortogonalment la transformació lineal T de V_3 que en la base canònica té la matriu associada

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

En primer lloc, com que la matriu associada A en la base canònica –que és ortonormal– és simètrica, podem afirmar que la transformació lineal T és simètrica i, en conseqüència, que diagonalitza en base ortonormal.

Comencem calculant els valors propis, que són les arrels del polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(x^2-1) = -(x-2)(x-1)(x+1) \begin{cases} 2 \text{ (simple)}\,; \\ 1 \text{ (simple)}\,; \\ -1 \text{ (simple)}\,. \end{cases}$$

Llavors els vectors propis respectius són:

$$S_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_1 + 2F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \left.\begin{array}{r} -2x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{array}\right\} \implies x = y = 0\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

i una base de S_2 és $\{(0, 0, 1)\}$.

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_3 \\ F_3 \sim F_2}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} x = y \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$$

i una base de S_1 és $\{(1, 1, 0)\}$.

I el vector propi de valor propi -1 el podem calcular fent el producte vectorial dels dos vectors anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)\,.$$

Per tant, com que els vectors anteriors són ortogonals per ser de valor propi diferent formen ja una base ortogonal i, normalitzant-los, obtenim la base ortonormal i la matriu diagonal respectives

$$\left\{(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)\right\} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 21

Diagonalitzeu ortogonalment la transformació lineal T de V_3 que ve definida per la matriu

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en la base $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{3}(2, 2, -1), \frac{1}{3}(2, -1, 2), \frac{1}{3}(-1, 2, 2)\}$.

Solució

En primer lloc, com que la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal i la matriu associada A en aquesta base és simètrica, podem afirmar que la transformació lineal T és simètrica i, en conseqüència, que diagonalitza en base ortonormal.

Els valors propis surten del polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 & 2 \\ 2 & -x & 2 \\ 2 & 2 & -x \end{vmatrix}_{C_1 \sim C_1+C_2+C_3} = \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 2 \\ 4-x & -x & 2 \\ 4-x & 2 & -x \end{vmatrix} = (4-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 2 & -x \end{vmatrix}_{\substack{F_2 \sim F_2-F_1 \\ F_3 \sim F_3-F_1}}$$

$$= (4-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -x-2 & 0 \\ 0 & 0 & -x-2 \end{vmatrix} = (4-x)(x+2)^2 \begin{cases} -2 \text{ (doble)}; \\ 4 \text{ (simple)}. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis:

$$S_{-2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2-F_1 \\ F_3 \sim F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad 2x' + 2y' + 2z' = 0 \quad \Longrightarrow \quad z' = -x' - y'.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x', y', z') = (x', y', -x' - y') = x'(1, 0, -1) + y'(0, 1, -1)$$

i obtenim els vectors de components $(1, 0, -1)$ i $(0, 1, -1)$ en la base ortonormal $\mathcal{B}'$, és a dir, els vectors

$$1 \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) - 1 \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = (1, 0, -1) \qquad \text{i} \qquad 1 \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2) - 1 \cdot \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = (1, -1, 0).$$

Aleshores, aplicant el mètode de Gram-Schmidt als vectors propis de S_{-2} tenim:

$\vec{v}_1{}' = (1, 0, -1)$;

$$\vec{v}_2{}' = (1, -1, 0) - \frac{(1, -1, 0) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)}(1, 0, -1) = (1, -1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{2}(1, -2, 1) \simeq (1, -2, 1).$$

I com que el vector propi de valor propi 4 ha de ser ortogonal a aquests, fem el seu producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -2, -2) \simeq (1, 1, 1).$$

Per tant, normalitzant tots tres vectors, tenim la base ortonormal i la matriu diagonal respectives

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercici 22

La matriu en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0)\}$ de la transformació lineal T de V_3 és

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analitzeu si és simètrica i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la ortogonalment.

Solució

Com que la base $\mathcal{B}'$ no és ortonormal, farem un canvi de base a la base canònica:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(V_3,\mathcal{B}_c) \arrow[r, "C^{-1}"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "A'"] & (V_3,\mathcal{B}') \arrow[r, "C"] & (V_3,\mathcal{B}_c) \\[-20pt]
X \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend right, "A = CA'C^{-1}"'] & X' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}' \arrow[r, mapsto] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

amb

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I, per tant, com que aquesta és la matriu de la transformació lineal en una base ortonormal –la canònica en aquest cas– i és simètrica, es dedueix que la transformació lineal T és també simètrica i, en conseqüència, que diagonalitza en base ortonormal.

Llavors, per diagonalitzar-la, comencem calculant els valors propis, que són les arrels del polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(x^2-1) = -(x-2)(x-1)(x+1) \begin{cases} 2 \ (\text{simple})\,; \\ 1 \ (\text{simple})\,; \\ -1 \ (\text{simple})\,. \end{cases}$$

Calculem ara els vectors propis:

$$S_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_1 + 2F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \left.\begin{array}{r} -2x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{array}\right\} \implies x = y = 0\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

i una base de S_2 és $\{(0,0,1)\}$.

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \leftrightarrow F_3} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} x = y \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$$

i una base de S_1 és $\{(1,1,0)\}$.

I el vector propi de valor propi -1 el podem calcular fent el producte vectorial dels dos vectors anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0)\,.$$

Per tant, com que els vectors anteriors són ortogonals per ser de valor propi diferent formen ja una base ortogonal i, normalitzant-los, obtenim la base ortonormal i la matrriu diagonal respectives

$$\left\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\right\} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 23

Una transformació lineal simètrica T de V_3 compleix

$$\left.\begin{aligned} T(0,-6,6) &= (-9,3,12) \\ T(6,0,-9) &= (-5,11,16) \end{aligned}\right\}$$

i, a més, el vector $(1,-1,1)$ és un vector propi de T. Determineu la representació de T en la base canònica.

Solució

Com que el vector $(1,-1,1)$ és un vector propi de T, es compleix que

$$T(1,-1,1) = \lambda(1,-1,1)\,.$$

Tenim, doncs, que

$$\left.\begin{aligned} T(0,-6,6) &= (-9,3,12) \\ T(6,0,-9) &= (-5,11,16) \\ T(1,-1,1) &= \lambda(1,-1,1) \end{aligned}\right\}$$

Aleshores, si A és la matriu de T en la base canònica tindrem que

$$A\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & -1 \\ -6 & -9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 & \lambda \\ 3 & 11 & -\lambda \\ 12 & 16 & \lambda \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència,

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -5 & \lambda \\ 3 & 11 & -\lambda \\ 12 & 16 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & -1 \\ -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\lambda + \frac{1}{6} & -\frac{2}{7}\lambda + \frac{5}{6} & \frac{2}{7}\lambda + \frac{2}{3} \\ \frac{3}{7}\lambda + \frac{5}{6} & -\frac{2}{7}\lambda + \frac{1}{6} & \frac{2}{7}\lambda - \frac{2}{3} \\ \frac{3}{7}\lambda + \frac{2}{3} & -\frac{2}{7}\lambda - \frac{2}{3} & \frac{2}{7}\lambda - \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

I com que la matriu A ha de ser simètrica per ser la matriu d'una transformació lineal simètrica en una base ortonormal –en aquest cas, la canònica–, s'ha de verificar que

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{7}\lambda + \frac{5}{6} &= -\frac{2}{7}\lambda + \frac{5}{6} \\ \frac{3}{7}\lambda + \frac{2}{3} &= \frac{2}{7}\lambda + \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{7}\lambda - \frac{2}{3} &= \frac{2}{7}\lambda - \frac{2}{3} \end{aligned}\right\},$$

que té com a solució $\lambda = 0$. Per tant, la matriu és

$$A = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 2/3 \\ 5/6 & 1/6 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

i la representació de T en la base canònica és, doncs,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Capítol 7

Còniques i quàdriques

7.1 Còniques

Exercici 1

Trobeu l'equació conjunta del parell de rectes

$$x - 2y + 2 = 0 \qquad \text{i} \qquad -3x + y - 1 = 0\,.$$

Solució

Tan sols cal multiplicar les dues expressions corresponents a les equacions anteriors:

$$(x - 2y + 2)(-3x + y - 1) = 0\,.$$

Per tant, queda

$$-3x^2 - 2y^2 + 7xy - 7x + 4y - 2 = 0\,.$$

Exercici 2

Calculeu l'equació de la circumferència de centre $(2, -3)$ i radi 4.

Solució

Del fet que la distància d'un punt genèric (x, y) al punt anterior ha de ser igual al radi, es dedueix que ha de ser

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 4\,,$$

que equival a

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2\,,$$

és a dir,

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$$

o, el que és el mateix,

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0\,.$$

Exercici 3

Es considera l'el·lipse que té per focus els punts $(2, 1)$ i $(0, 3)$ i semieix major igual a 2.

(a) Determineu una referència principal i l'equació reduïda.

(b) Calculeu la seva equació en la referència canònica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, el centre de l'el·lipse és el punt mig dels dos focus:

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2)\,.$$

D'altra banda, el vector director de l'eix principal és

$$(0, 3) - (2, 1) = (-2, 2) \simeq (1, -1)\,;$$

i el de l'eix secundari (que ha de ser ortogonal a aquest) és, doncs, $(1, 1)$. Per tant, la referència principal és

$$\mathcal{R}' = \left\{(1, 2);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right\}.$$

A més, com que el semieix major és $a = 2$ i la semidistància focal és

$$c = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}\,,$$

es té que el semieix menor és

$$b = \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}\,.$$

Per tant, l'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1\,.$$

(b) Llavors, l'equació del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i, per tant, el canvi de referència invers de la referència canònica $\mathcal{R}_c$ a la referència principal $\mathcal{R}'$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y+1 \\ x+y-3 \end{pmatrix}.$$

I substituint les equacions del canvi de referència anterior a l'equació equivalent

$$x'^2 + 2y'^2 - 4 = 0\,,$$

queda

$$\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 = 0$$

que, desenvolupant, es converteix en

$$\frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{2} + 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y}{2} - 4 = 0\,,$$

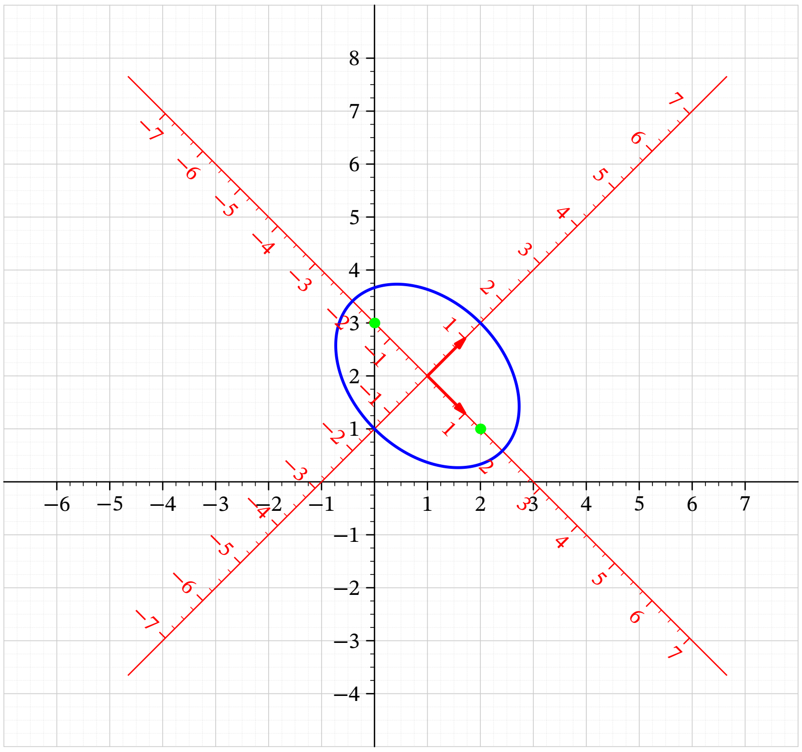
és a dir,

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y + 2x^2 + 2y^2 + 18 + 4xy - 12x - 12y - 8 = 0$$

o, equivalentment,

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 11 = 0\,.$$

(c) La representació gràfica és



Exercici 4

Es considera la paràbola que té per focus el punt $(-2, 1)$ i per directriu la recta d'equació

$$x + 2y - 10 = 0\,.$$

(a) Determineu una referència principal i l'equació reduïda.

(b) Calculeu la seva equació en la referència canònica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, l'eix secundari és el perpendicular a la directriu que passa pel focus i, per tant, té equació

$$2x - y + C = 0\,,$$

amb

$$2 \cdot (-2) - 1 + C = 0\,.$$

Per tant, es té que $C = 5$ i l'equació és, doncs,

$$2x - y + 5 = 0\,,$$

A més, la intersecció de l'eix secundari i la directriu ve donat pel sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 5 =&0 \\ x + 2y - 10 =&0 \end{aligned}\right\},$$

que té solució $x = 0$ i $y = 5$. I el vèrtex és el punt mig del focus i del punt anterior $(0, 5)$:

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)\,.$$

Per tant,, la referència principal està formada pel vèrtex i pels vectors directors unitaris dels eixos:

$$\mathcal{R}' = \left\{(-1, 3); \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\right\}.$$

A més, com que el vector $(1, 2)$ té el sentit del focus a la directriu i el paràmetre és

$$p = \frac{|-2 + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}\,,$$

tenim que l'equació reduïda és

$$y' = -\frac{x'^2}{4\sqrt{5}}\,.$$

(b) Llavors, l'equació del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i, per tant, el canvi de referència invers de la referència canònica $\mathcal{R}_c$ a la referència principal $\mathcal{R}'$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x - y + 5 \\ x + 2y - 5 \end{pmatrix}.$$

Llavors, substituint les equacions del canvi de referència invers anterior a l'equació equivalent

$$4\sqrt{5}y' = -x'^2\,,$$

obtenim

$$4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 5) = -\left(\frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}}\right)^2$$

o bé

$$4(x + 2y - 5) = -\frac{4x^2 + y^2 + 25 - 4xy + 20x - 10y}{5}\,.$$

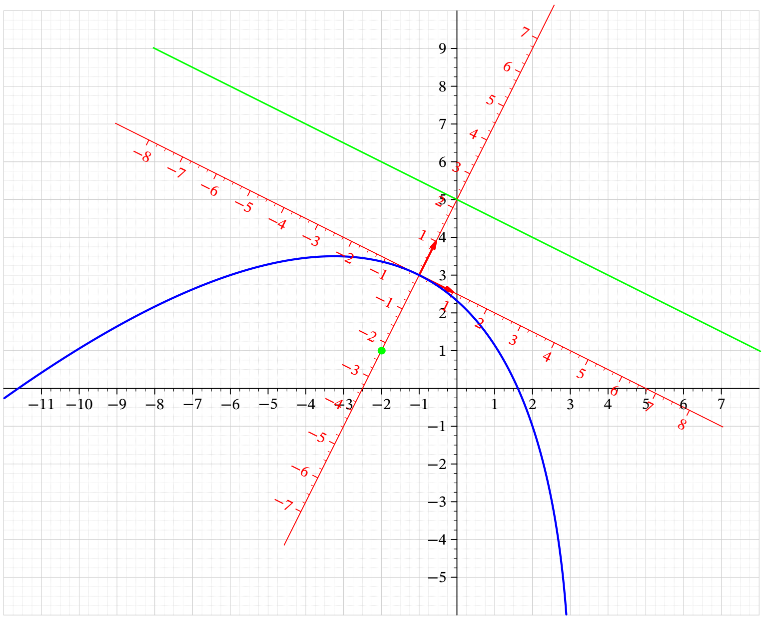
I passant el 5 a l'altre costat i desenvolupant, queda

$$20x + 40y - 100 = -4x^2 - y^2 - 25 + 4xy - 20x + 10y$$

o, equivalentment,

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 40x + 30y - 75 = 0\,.$$

(c) La representació gràfica és



Exercici 5

Es considera la hipèrbola que té per focus els punts $(-1, 2)$ i $(3, 0)$ i semieix real 2.

(a) Determineu una referència principal i l'equació reduïda.

(b) Calculeu la seva equació en la referència canònica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, el centre de la hipèrbola és el punt mig dels dos focus:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (1, 1)\,.$$

D'altra banda, el vector director de l'eix principal és

$$(3, 0) - (-1, 2) = (4, -2) \simeq (2, -1)\,;$$

i el de l'eix secundari (que ha de ser ortogonal a aquest) és, doncs, $(1, 2)$. Per tant, la referència principal és

$$\mathcal{R}' = \left\{(1, 1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\right\}.$$

I com que el semieix real és 2 i la semidistància focal és

$$c = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}\,,$$

es té que el semieix imaginari és

$$b = \sqrt{\sqrt{5}^2 - 2^2} = 1\,.$$

Per tant, l'equació reduïda de la hipèrbola és

$$\frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1\,.$$

(b) Llavors, l'equació del canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i, per tant, el canvi de referència invers de la referència canònica $\mathcal{R}_c$ a la referència principal $\mathcal{R}'$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x-y-1 \\ x+2y-3 \end{pmatrix}.$$

I substituint les equacions del canvi de coordenades anterior a l'equació equivalent

$$x'^2 - 4y'^2 - 4 = 0\,,$$

tenim

$$\left(\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4 = 0$$

que, desenvolupant, es converteix en

$$\frac{4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y}{5} - 4 \cdot \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y)}{5} - 4 = 0\,,$$

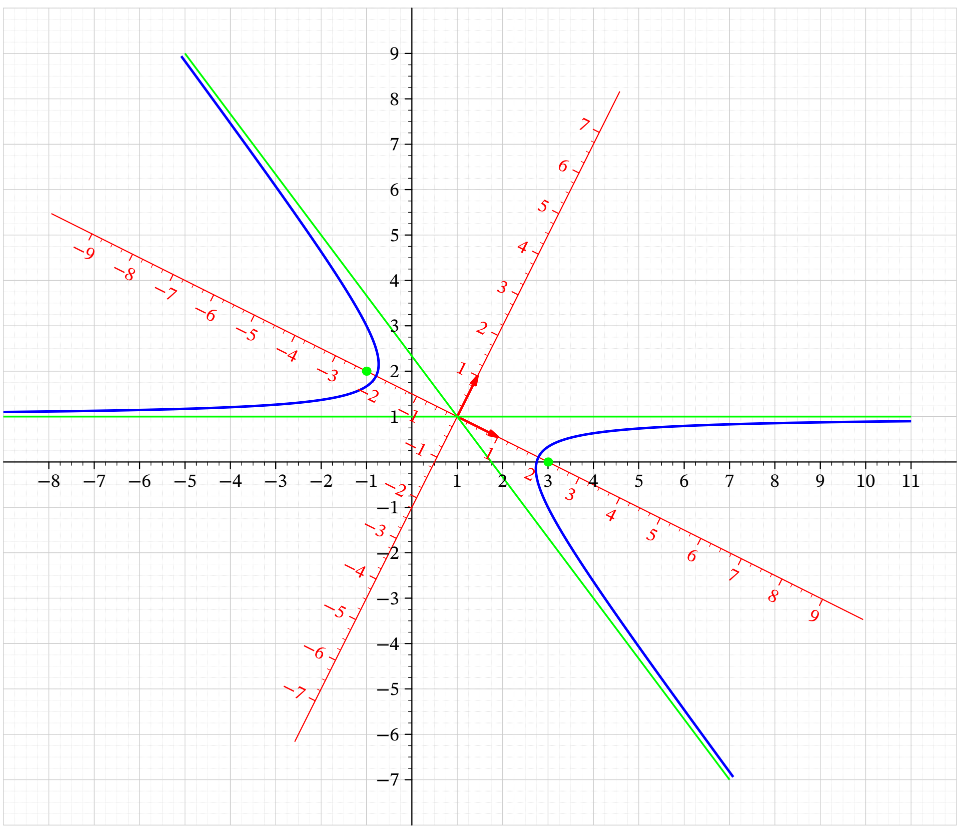
o sigui,

$$-20xy - 15y^2 + 20x + 50y - 55 = 0$$

o, equivalentment,

$$4xy + 3y^2 - 4x - 10y + 11 = 0\,.$$

(c) La representació gràfica és



Exercici 6

Trobeu les rectes que formen la cònica

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 4x - 3y + 2 = 0\,.$$

Solució

Posem l'expressió corresponent a l'equació anterior com a producte de dues expressions de primer grau:

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 4x - 3y + 2 = (Ax + By + C)(ax + by + c)\,.$$

En primer lloc, com que les equacions s'han de determinar excepte proporcionalitat, podem escollir un dels coeficients de cadascuna d'elles. I com que

$$Aa = 2\,,$$

podem agafar $A = 2$ i $a = 1$ per exemple i ens queda llavors

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 4x - 3y + 2 = (2x + By + C)(x + by + c)\,.$$

Aleshores, igualant els coeficients dels termes que involucren els coeficients B i b tenim

$$\left.\begin{aligned} 2b + B &= -3 \\ Bb &= -2 \end{aligned}\right\}$$

i, en substituir $B = -3-2b$ a la segona equació, ens queda l'equació de segon grau $-2b^2-3b+2 = 0$, que té solucions $b = -2$ i $b = \frac{1}{2}$.

Llavors, podem escollir un qualsevol dels dos valors anteriors (ja que l'altre dona lloc a les mateixes rectes en ordre contrari), per exemple $b = -2$ i $B = 1$. I la igualtat anterior passa a ser, doncs,

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 4x - 3y + 2 = (2x + y + C)(x - 2y + c)\,.$$

Finalment, igualant els termes que involucren els coeficients C i c queda

$$\left.\begin{aligned} 2c + C &= 4 \\ c - 2C &= -3 \\ Cc &= 2 \end{aligned}\right\}\,.$$

En particular, les dues primeres equacions formen un sistema lineal, les solucions del qual són $c = 1$ i $C = 2$, que verifiquen també la tercera equació. Per tant, les rectes són

$$2x + y + 2 = 0 \qquad \text{i} \qquad x - 2y + 1 = 0\,.$$

Exercici 7

Determineu el centre i el radi de la circumferència d'equació

$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 15 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, es tracta d'una circumferència perquè els coeficients dels termes quadràtics purs són iguals –4 en aquest cas– i els dels termes quadràtics creuats són tots 0.

En aquest cas, només cal completar quadrats.

Aleshores, dividint per 4, queda l'equació

$$x^2 + y^2 - 2x + y - \frac{15}{4} = 0\,,$$

que podem escriure en la forma

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 5\,.$$

Per tant, el centre i el radi són, respectivament,

$$\left(1, -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{i} \qquad \sqrt{5}\,.$$

Exercici 8

Es considera la cònica d'equació

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x + 16 = 0\,.$$

(a) Classifiqueu-la.

(b) Determineu els elements geomètrics, els paràmetres i la definició mètrica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica i de la part lineal i del terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 16\,.$$

Llavors, l'equació dels centres ve donada pern $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim 3F_2 - F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -8 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -3$ i $y = 1$. Per tant, el centre és $(-3, 1)$ i, en particular, és una cònica amb centre.

Els valors propis són les arrels del polinomi característic de la matriu Q:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = 0 \begin{cases} 4\ (\text{simple})\,; \\ 2\ (\text{simple})\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_4 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim F_2 + F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad x = y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y) = (y, y) = y(1, 1)$$

i una base de S_4 és $\{(1, 1)\}$.

I com que l'altre ha de ser ortogonal a aquest, tenim que una base de S_2 és $\{(-1, 1)\}$.

I, d'altra banda, com que els valors propis eren 4 i 2 i

$$f' = 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 16 \cdot (-3) + 16 = -8\,,$$

l'equació queda

$$4x'^2 + 2y'^2 - 8 = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la cònica és l'el·lipse real que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(-3, 1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1\,.$$

(b) D'altra banda, el centre ja l'hem trobat abans i és el punt

$$(-3, 1)\,.$$

Els eixos principal i secundari són les rectes pel centre amb els vectors directors els de la referència principal

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} \qquad \text{i} \qquad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{1}\,.$$

Per tant, el semieix major, el semieix menor, la semidistància focal i la constant són, respectivament,

$$a = 2\,, \qquad b = \sqrt{2}\,, \qquad c = \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad k = 2 \cdot 2 = 4\,.$$

Llavors, els focus tenen coordenades $(0, \sqrt{2})$ i $(0, -\sqrt{2})$ en la referència principal

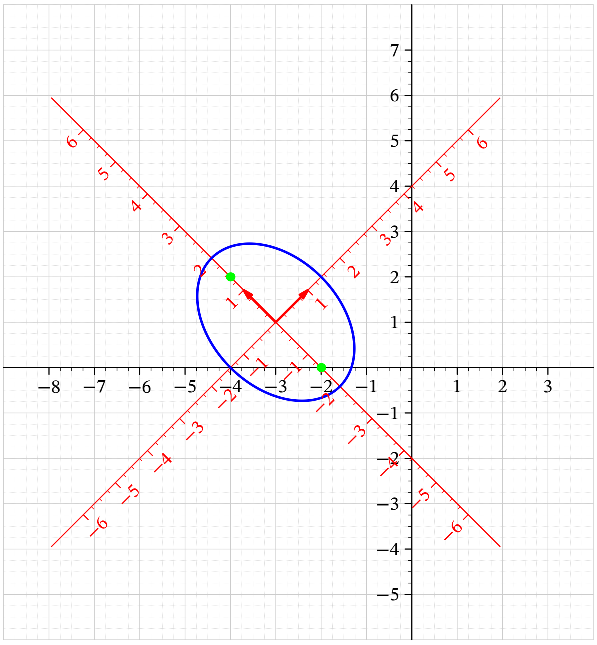
$$(-3, 1) + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = (-4, 2) \qquad \text{i} \qquad (-3, 1) - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = (-2, 0)$$

i els vèrtexs tenen coordenades $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 2)$ i $(0, -2)$ en aquesta mateixa referència

$$(-3, 1) + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = (-2, 2)\,; \qquad (-3, 1) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = (-3 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})\,;$$
$$(-3, 1) - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = (-4, 0)\,; \qquad (-3, 1) - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = (-3 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})\,.$$

I obtenim el lloc geomètric dels punts tals que la suma de les seves distàncies a $(-4, 2)$ i $(-2, 0)$ és 4.

(c) La representació gràfica és



Exercici 9

Es considera la cònica d'equació

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 11 = 0\,.$$

(a) Classifiqueu-la.

(b) Determineu els elements geomètrics, els paràmetres i la definició mètrica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica i de la part lineal i del terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -11\,.$$

Llavors, l'equació dels centres ve donada per $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & -16 \\ -2 & 1 & -17 \end{array}\right)_{F_2 \sim 2F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -50 \end{array}\right),$$

que és incompatible. Per tant, la cònica no té centre i es tracta d'una paràbola.

Els valors propis són les arrels del polinomi característic de la matriu Q:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 \\ -2 & 1-x \end{vmatrix} = (4-x)(1-x) - 4 = x^2 - 5x = 0 \begin{cases} 5 \text{ (simple)}\,; \\ 0 \text{ (simple)}\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_5 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \simeq \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad x = -2y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1)$$

i una base de S_5 és $\{(2, -1)\}$ (hem escollit aquest vector perquè volem que la direcció positiva de l'eix de les x' vagi cap a la dreta).

I com que l'altre vector propi ha de ser ortogonal a aquest, tenim que una base de S_0 és $\{(1, 2)\}$.

A més, l'eix de simetria és

$$(2, -1) \cdot [5(x, y) + (16, 17)] = 0$$

o, equivalentment,

$$2x - y + 3 = 0\,.$$

I substituint $y = 2x + 3$ a l'equació original es té

$$4x^2 - 4x(2x + 3) + (2x + 3)^2 + 32x + 34(2x + 3) - 11 = 0\,,$$

d'on s'obté que

$$100x + 100 = 0$$

i, per tant, $x = -1$ i $y = 1$ i el vèrtex és el punt $(-1, 1)$.

I d'altra banda, com que els valors propis eren 5 i 0, l'equació queda

$$5x'^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \cdot (16, 17)\right)y' = 0\,,$$

és a dir,

$$5x'^2 + 20\sqrt{5}y' = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la cònica és la paràbola de referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(-1, 1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\right\} t$$

té equació reduïda

$$y' = -\frac{x'^2}{4\sqrt{5}}\,.$$

(b) D'altra banda, el vèrtex ja l'hem trobat abans i és el punt

$$(-1, 1)\,.$$

Els eixos són les rectes que passen pel vèrtex i tenen vectors directors els de la referència principal

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} \qquad \text{i} \qquad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2}\,.$$

A més, com que $2p = 4\sqrt{5}$, es té que el paràmetre és

$$p = 2\sqrt{5}$$

i, per tant, és $\frac{p}{2} = \sqrt{5}$. I llavors, el focus té coordenades $(0, -\sqrt{5})$ en la referència principal:

$$(-1,1) - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (-2,-1)\,.$$

I com que l'equació de la directriu en la referència principal és $y' = \sqrt{5}$, a partir del canvi invers

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2x+y-3 \\ x+2y-1 \end{pmatrix},$$

s'obté que la seva equació en la referència canònica és

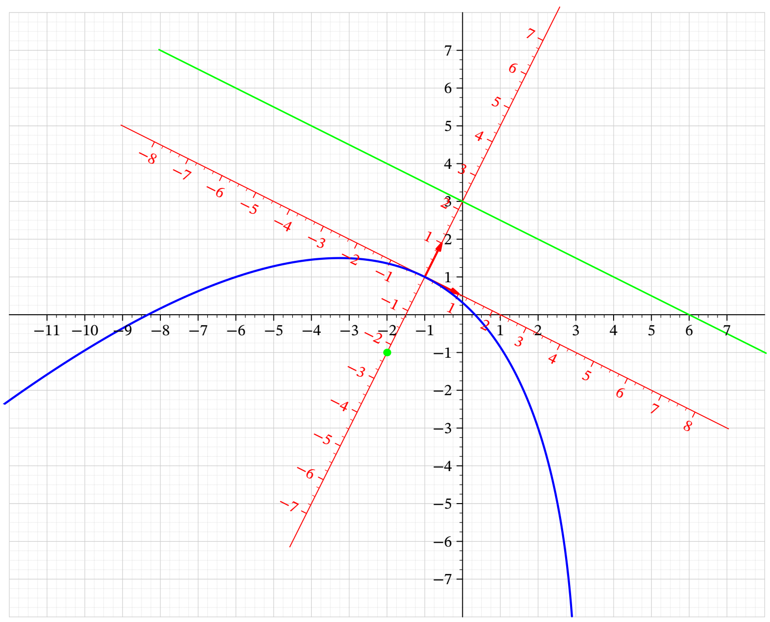
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1) = \sqrt{5}$$

o, el que és el mateix,

$$x + 2y - 6 = 0\,.$$

I obtenim així el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del punt $(-2,-1)$ i de la recta $x + 2y - 6 = 0$.

(c) La representació gràfica és



Exercici 10

Es considera la cònica d'equació

$$3x^2 - 4xy - 8x + 8y = 0\,.$$

(a) Classifiqueu-la.

(b) Determineu els elements geomètrics, els paràmetres i la definició mètrica.

(c) Representeu-la gràficament.

Solució

(a) En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica i de la part lineal i del terme independeent són

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 0\,.$$

Llavors, l'equació dels centres ve donada per $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim 3F_2 + 2F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 2$ i $y = 1$. Per tant, el centre és el $(2, 1)$ i, en particular, és una cònica amb centre.

Els valors propis són les arrels del polinomi característic de la matriu Q:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3 - x & -2 \\ -2 & -x \end{vmatrix} = (3 - x)(-x) - 4 = x^2 - 3x - 4 = 0 \begin{cases} 4 \text{ (simple)}\,; \\ -1 \text{ (simple)}\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_4 : \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \sim F_2 - 2F_1}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad x = -2y\,.$$

Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1)$$

i una base de S_4 és $\{(-2, 1)\}$.

I com que l'altre vector ha de ser ortogonal a aquest, tenim que una base de S_{-1} és $\{(1, 2)\}$.

I com que els valors propis eren 4 i -1 i

$$f' = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = -4\,,$$

l'equació queda

$$4x'^2 - y'^2 - 4 = 0\,.$$

En definitiva, aïllant, es té que la cònica és la hipèrbola que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(2, 1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\right\}$$

té equació reduïda

$$x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1\,.$$

(b) D'altra banda, el centre ja l'hem trobat i és el punt

$$(2, 1)\,.$$

Els eixos principal i secundari són les rectes pel centre amb els vectors directors els de la referència principal

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1} \qquad \text{i} \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}\,.$$

Per tant, el semieix real, el semieix imaginari, la semidistància focal i la constant són, respectivament,

$$a=1\,,\qquad b=2\,,\qquad c=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\qquad \text{i}\qquad k=2\cdot 1=2\,.$$

I llavors, els focus són els punts de coordenades $(\sqrt{5},0)$ i $(-\sqrt{5},0)$ en la referència principal

$$(2,1)+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=(0,2)\qquad \text{i}\qquad (2,1)-\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=(4,0)$$

i els vèrtexs els de coordenades $(1,0)$ i $(-1,0)$ en aquesta mateixa referència

$$(2,1)+1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}},1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\qquad \text{i}\qquad (2,1)-1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}},1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Finalment, el canvi de referència invers ve donat per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2x+y+3 \\ x+2y-4 \end{pmatrix}.$$

I substituint a les equacions de les asímptotes en la referència principal $y'=\frac{2}{1}x'=2x'$ i $y'=-\frac{2}{1}x'=-2x'$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-4)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+3)\qquad \text{i}\qquad \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-4)=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+3)$$

es té

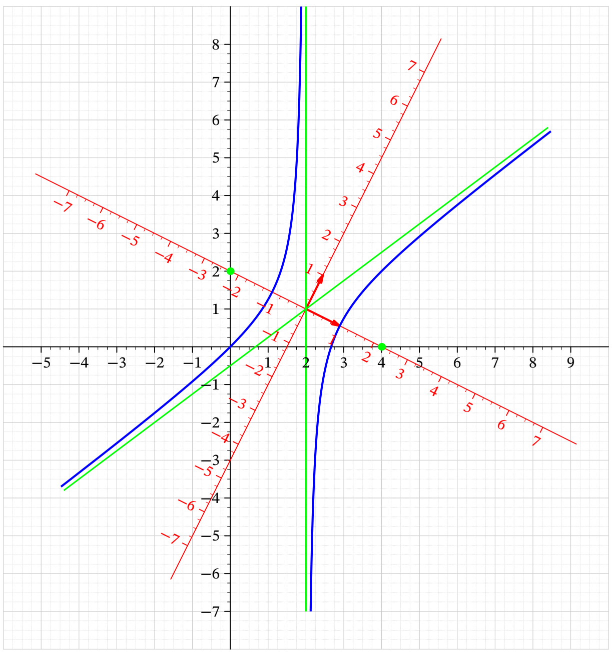
$$x+2y-4=-4x+2y+6\qquad \text{i}\qquad x+2y-4=4x-2y-6$$

o, el que és el mateix,

$$x-2=0\qquad \text{i}\qquad 3x-4y-2=0\,.$$

I obtenim així el lloc geomètric dels punts tals que el valor absolut de la diferència de les seves distàncies als punts $(4,0)$ i $(0,2)$ és 2.

(c) La representació gràfica és



7.2 Quàdriques

Exercici 11

Donada la quàdrica d'equació en la referència canònica

$$7x^2 + 7y^2 - 5z^2 - 34xy - 10xz - 10yz + 136x - 56y + 40z - 8 = 0\,,$$

trobeu la seva equació en la referència $\mathcal{R}' = \{(-2,2,4);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)\}$.

Solució

En primer lloc, les matrius de la part quadràtica i la part lineal i el terme independent són, respectivament,

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & -17 & -5 \\ -17 & 7 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 68 \\ -28 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -8\,.$$

A més, el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Per tant, substituint, tenim que

$$Q' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 7 & -17 & -5 \\ -17 & 7 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}^t \left[\begin{pmatrix} 7 & -17 & -5 \\ -17 & 7 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 68 \\ -28 \\ 20 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} f' =& 7 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot 2^2 - 5 \cdot 4^2 - 34 \cdot (-2) \cdot 2 - 10 \cdot (-2) \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 4 + 136 \cdot (-2) - 56 \cdot 2 + 40 \cdot 4 - 8 \\ =& -120\,. \end{aligned}$$

En conseqüència, l'equació buscada és

$$24x'^2 - 15y'^2 - 120 = 0$$

i, aïllant, s'obté en particular que es tracta del cilindre hiperbòlic

$$\frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{8} = 1\,.$$

Exercici 12

Calculeu l'equació en la referència canònica de la quàdrica que té equació

$$x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = 0$$

en la referència rectangular $\mathcal{R}' = \{(3,-1,2);\ \frac{1}{3}(2,2,-1), \frac{1}{3}(2,-1,2), \frac{1}{3}(-1,2,2)\}$.

Solució

En primer lloc, les matrius de la part quadràtica i la part lineal i el terme independent són, respectivament,

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \qquad L' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f' = 0\,.$$

A més, com sabem, el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ ve donat per l'expressió $X = B + CX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

I aleshores, aïllant les matrius respectives de la quàdrica en la referència canònica de les corresponents expressions de les matrius en la referència $\mathcal{R}'$

$$\left.\begin{aligned} Q' &= C^tQC \\ L' &= C^t(QB + L) \\ f' &= B^tQB + 2L^tX + f \end{aligned}\right\}$$

s'obtenen les fórmules recurrents següents:

$$\left.\begin{aligned} Q &= CQ'C^t \\ L &= CL' - QB \\ f &= f' - B^tQB - 2L^tB \end{aligned}\right\}.$$

En el nostre cas, es té

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$f = 0 - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{41}{3}.$$

I multiplicant tots els coeficients per 3, s'obté que l'equació buscada és

$$2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz - 8yz - 16x + 2y - 16z + 41 = 0\,.$$

Exercici 13

Trobeu l'equació de la quàdrica formada pel parell de plans

$$x - 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \text{i} \qquad y - 2z + 2 = 0\,.$$

Solució

Tan sols cal multiplicar les dues expressions corresponents a les equacions anteriors:

$$(x - 2y + 3z - 1) \cdot (y - 2z + 2) = 0\,.$$

Per tant, queda

$$xy - 2y^2 - 2xz + 7yz - 6z^2 + 2x - 5y + 8z - 2 = 0\,.$$

Exercici 14

Determineu les equacions dels dos plans que formen la quàdrica d'equació

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 + 4xy - 8xz - 14yz = 0\,.$$

Solució

Posem l'expressió corresponent a l'equació anterior com a producte de dues expressions de primer grau:

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 + 4xy - 8xz - 14yz = (Ax + By + Cz + D)(ax + by + cz + d)\,.$$

En primer lloc, com que les equacions s'han de determinar excepte proporcionalitat, podem escollir un dels coeficients de cadascuna d'elles. I com que

$$Aa = 1\,,$$

podem agafar $A = a = 1$ per exemple i ens queda llavors

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 + 4xy - 8xz - 14yz = (x + By + Cz + D)(x + by + cz + d)\,.$$

Aleshores, igualant els coeficients dels termes que involucren els coeficients B i b tenim

$$\left.\begin{aligned} b + B &= 4 \\ Bb &= 3 \end{aligned}\right\}$$

i, en substituir $B = 4 - b$ a la segona equació, ens queda l'equació de segon grau $-b^2 + 4b - 3 = 0$, que té solucions $b = 3$ i $b = 1$.

Llavors, podem escollir un qualsevol dels dos valors anteriors (ja que l'altre dona lloc a les mateixes rectes en ordre contrari), per exemple $b = 3$ i $B = 1$. I la igualtat anterior passa a ser

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 + 4xy - 8xz - 14yz = (x + y + Cz + D)(x + 3y + cz + d)\,.$$

Aleshores, igualant els termes que involucren els coeficients C i c queda

$$\left.\begin{aligned} c + C &= -8 \\ c + 3C &= -14 \\ Cc &= 15 \end{aligned}\right\}\,.$$

En particular, les dues primeres equacions formen un sistema lineal, les solucions del qual són $c = -5$ i $C = -3$, que verifiquen també la tercera equació. Per tant, queda ara

$$x^2 + 3y^2 + 15z^2 + 4xy - 8xz - 14yz = (x + y - 3z + D)(x + 3y - 5z + d)\,.$$

Finalment, fent el mateix pels coeficients D i d obtenim

$$\left.\begin{aligned} d + D &= 0 \\ d + 3D &= 0 \\ -3d - 5D &= 0 \\ Dd &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que, evidentment, té solució $D = d = 0$. Per tant, obtenim els plans secants reals d'equacions

$$x + y - 3z = 0 \qquad \text{i} \qquad x + 3y - 5z = 0\,.$$

Exercici 15

Calculeu l'equació de l'esfera de centre $(1, -2, 1)$ i radi 3.

Solució

Del fet que la distància d'un punt genèric (x, y, z) al punt anterior ha de ser igual al radi, es dedueix que ha de ser

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = 3$$

que equival a

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3^2\,,$$

és a dir,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

o, el que és el mateix,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0\,.$$

Exercici 16

Determineu el centre i el radi de l'esfera d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 10 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, es tracta d'una esfera perquè els coeficients dels termes quadràtics purs són iguals –1 en aquest cas– i els dels termes quadràtics creuats són tots 0.

En aquest cas, només cal completar quadrats.

Aleshores, l'equació s'escriu

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-3)^2 - 9 + 10 = 0$$

o, equivalentment,

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4\,.$$

Per tant, el centre i el radi són, respectivament,

$$(2, -1, 3) \qquad \text{i} \qquad 2\,.$$

Exercici 17

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + 4yz + 2x - 2y + 4z - 6 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -6\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 4F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 + 2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 15 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{array}\right)_{F_3 \sim 3F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$. Per tant, el centre és el punt $(1, -1, 2)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 4 - x & 1 & -2 \\ 1 & 4 - x & 2 \\ -2 & 2 & 1 - x \end{vmatrix} = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25 = 0 \begin{cases} 5 \text{ (doble)}\,; \\ -1 \text{ (simple)}\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_5 : \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = y - 2z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

i una base de S_5 és $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$.

Llavors, com que aquests dos vectors no són ortogonals, apliquem el mètode de Gram–Schmidt:

$$\vec{v}_1' = (1, 1, 0)\,;$$
$$\vec{v}_2' = (-2, 0, 1) - \frac{(-2, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)}(1, 1, 0) = (-2, 0, 1) + \frac{2}{2}(1, 1, 0) = (-1, 1, 1)\,.$$

I el vector propi de valor propi -1 el podem calcular fent el producte vectorial dels dos vectors anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,2)\,.$$

I com que

$$f' = 4\cdot 1^2 + 4\cdot(-1)^2 + 2^2 + 2\cdot 1\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 4\cdot 2 - 6 = 0\,,$$

s'obté l'equació

$$5x'^2 + 5y'^2 - z'^2 = 0\,.$$

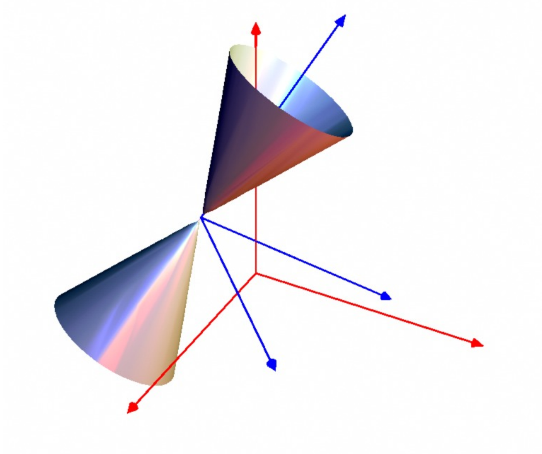
Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és el con real de revolució que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,-1,2);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{1/5} + \frac{y'^2}{1/5} - z'^2 = 0\,.$$

Nota: El seu gràfic és



Exercici 18

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$23x^2 + 23y^2 + 8z^2 - 34xy + 4xz + 4yz + 84x - 76y - 24z + 68 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 23 & -17 & 2 \\ -17 & 23 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 42 \\ -38 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 68\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 23 & -17 & 2 \\ -17 & 23 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 \\ -38 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 23 & -17 & 2 & -42 \\ -17 & 23 & 2 & 38 \\ 2 & 2 & 8 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 23F_2+17F_1 \\ F_3\sim 23F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 23 & -17 & 2 & -42 \\ 0 & 240 & 80 & 160 \\ 0 & 80 & 180 & 360 \end{array}\right) \underset{F_3\sim 3F_3-F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 23 & -17 & 2 & -42 \\ 0 & 240 & 80 & 160 \\ 0 & 0 & 460 & 920 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -2$, $y = 0$ i $z = 2$. Per tant, el centre és el punt $(-2, 0, 2)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 23-x & -17 & 2 \\ -17 & 23-x & 2 \\ 2 & 2 & 8-x \end{vmatrix} = -x^3 + 54x^2 - 600x - 1600 = 0 \begin{cases} 4\,; \\ 10\,; \\ 40\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_4 : \left(\begin{array}{rrr|r} 19 & -17 & 2 & 0 \\ -17 & 19 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 19F_2+17F_1 \\ F_3\sim 19F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 19 & -17 & 2 & 0 \\ 0 & 72 & 72 & 0 \\ 0 & 72 & 72 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3\sim F_3-F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 19 & -17 & 2 & 0 \\ 0 & 72 & 72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = y$ i $z = -y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, -y) = y(1, 1, -1)$$

i una base de S_4 és $\{(1, 1, -1)\}$.

$$S_{10} : \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & -17 & 2 & 0 \\ -17 & 13 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\sim 13F_2+17F_1 \\ F_3\sim 13F_3-2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & -17 & 2 & 0 \\ 0 & -120 & 60 & 0 \\ 0 & 60 & -30 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3\sim 2F_3+F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & -17 & 2 & 0 \\ 0 & -120 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = y$ i $z = 2y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, 2y) = y(1, 1, 2)$$

i una base de S_{10} és $\{(1, 1, 2)\}$.

I el vector propi de valor propi 40 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 0) \simeq (1, -1, 0)\,.$$

I com que

$$f' = 23\cdot(-2)^2 + 23\cdot 0^2 + 8\cdot 2^2 + -34\cdot(-2)\cdot 0 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 4\cdot 0\cdot 2 + 84\cdot(-2) - 76\cdot 0 - 24\cdot 2 + 68 = -40,$$

s'obté l'equació

$$4x'^2 + 10y'^2 + 40z'^2 - 40 = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és l'el·lipsoide real que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(-2, 0, 2);\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 1\,.$$

Exercici 19

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$37x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 34xy + 34xz + 26yz - 154x - 86y - 38z + 13 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 37 & 17 & 17 \\ 17 & 7 & 13 \\ 17 & 13 & 7 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -77 \\ -43 \\ -19 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 13\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 37 & 17 & 17 \\ 17 & 7 & 13 \\ 17 & 13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -77 \\ -43 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 37 & 17 & 17 & 77 \\ 17 & 7 & 13 & 43 \\ 17 & 13 & 7 & 19 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 37F_2 - 17F_1 \\ F_3 \sim 37F_3 - 17F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 37 & 17 & 17 & 77 \\ 0 & -30 & 192 & 282 \\ 0 & 192 & -30 & -606 \end{array}\right)_{F_3 \sim 5F_3 - 32F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 37 & 17 & 17 & 77 \\ 0 & -30 & 192 & 282 \\ 0 & 0 & -35964 & -35964 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 3$, $y = -3$ i $z = 1$. Per tant, el centre és el punt $(3, -3, 1)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 37-x & 17 & 17 \\ 17 & 7-x & 13 \\ 17 & 13 & 7-x \end{vmatrix} = -x^3 + 51x^2 + 180x - 972 = 0 \begin{cases} 3\,; \\ 54\,; \\ -6\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 34 & 17 & 17 & 0 \\ 17 & 4 & 13 & 0 \\ 17 & 13 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 34 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 34 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $y = -x$ i $z = -x$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (x, -x, -x) = x(1, -1, -1))$$

i una base de S_4 és $\{(1,-1,-1)\}$.

$$S_{54}:\left(\begin{array}{ccc|c} -17 & 17 & 17 & 0 \\ 17 & -47 & 13 & 0 \\ 17 & 13 & -47 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2+F_1 \\ F_3\sim F_3+F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -17 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \\ 0 & 30 & -30 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -17 & 17 & 17 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 2z$ i $y = z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (2z, z, z) = z(2, 1, 1)$$

i una base de S_{54} és $\{(2, 1, 1)\}$.

I el vector propi de valor propi -6 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, 3) \simeq (0, -1, 1)\,.$$

I com que

$$f' = 37\cdot3^2+7\cdot(-3)^2+7\cdot1^2+34\cdot3\cdot(-3)+34\cdot3\cdot1+26\cdot(-3)\cdot1-154\cdot3-86\cdot(-3)-38\cdot1+13 = -108\,,$$

s'obté l'equació

$$3x'^2 + 54y'^2 - 6z'^2 - 108 = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és l'hiperboloide d'una fulla que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(3, -3, 1);\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{18} = 1\,.$$

Exercici 20

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$-11x^2 - 11y^2 + 7z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 68x + 40y + 22z + 79 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} -11 & 16 & -2 \\ 16 & -11 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -34 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 79\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} -11 & 16 & -2 \\ 16 & -11 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -11 & 16 & -2 & 34 \\ 16 & -11 & -2 & -20 \\ -2 & -2 & 7 & -11 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 11F_2+16F_1\\ F_3\sim 11F_3-2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -11 & 16 & -2 & 34 \\ 0 & -135 & 54 & -324 \\ 0 & 54 & -81 & 189 \end{array}\right)_{F_3\sim 5F_3+2F_2}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -11 & 16 & -2 & 34 \\ 0 & -135 & 54 & -324 \\ 0 & 0 & -297 & 297 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 0$, $y = 2$ i $z = -1$. Per tant, el centre és el punt $(0, 2, -1)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} -11-x & 16 & -2 \\ 16 & -11-x & -2 \\ -2 & -2 & 7-x \end{vmatrix} = -x^3 + 51x^2 + 180x - 972 = 0 \begin{cases} 9\,; \\ 3\,; \\ -27\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_9 : \left(\begin{array}{ccc|c} -20 & 16 & -2 & 0 \\ 16 & -20 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 5F_2+4F_1\\ F_3\sim 10F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -20 & 16 & -2 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -20 & 16 & -2 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = y$ i $z = -2y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, -2y) = y(1, 1, -2))$$

i una base de S_9 és $\{(1, 1, -2)\}$.

$$S_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 16 & -2 & 0 \\ 16 & -14 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 7F_2+8F_1\\ F_3\sim 7F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 16 & -2 & 0 \\ 0 & 30 & -30 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 16 & -2 & 0 \\ 0 & 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = z$ i $y = z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$$

i una base de S_3 és $\{(1, 1, 1)\}$.

I el vector propi de valor propi -27 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, 0) \simeq (1, -1, 0)\,.$$

I com que

$$f' = -11\cdot 0^2 + -11\cdot 2^2 + 7\cdot(-1)^2 + 32\cdot 0\cdot 2 - 4\cdot 0\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot(-1) - 68\cdot 0 + 40\cdot 2 + 22\cdot(-1) + 79 = 108\,,$$

s'obté l'equació

$$9x'^2 + 3y'^2 - 27z'^2 + 108 = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és l'hiperboloide de dues fulles que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(0,2,-1);\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right\}$$

té equació reduïda

$$-\frac{x'^2}{12} - \frac{y'^2}{36} + \frac{z'^2}{4} = 1\,.$$

Exercici 21

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$11x^2 - 5y^2 + z^2 - 26xy - 38xz - 6yz - 112x + 28z - 14 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 11 & -13 & -19 \\ -13 & -5 & -3 \\ -19 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -56 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -14\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 11 & -13 & -19 \\ -13 & -5 & -3 \\ -19 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -56 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -13 & -19 & 56 \\ -13 & -5 & -3 & 0 \\ -19 & -3 & 1 & -14 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 11F_2 + 13F_1 \\ F_3 \sim 11F_3 + 19F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -13 & -19 & 56 \\ 0 & -224 & -280 & 728 \\ 0 & -280 & -350 & 910 \end{array}\right)_{F_3 \sim 4F_3 - 5F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 37 & 17 & 17 & 77 \\ 0 & -224 & -280 & 728 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $y = -5x + 3$ i $z = 4x - 5$. Per tant, prenent $x = 0$ per exemple, tenim que un centre és el punt $(0, 3, -5)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 11-x & -13 & -19 \\ -13 & -5-x & -3 \\ -19 & -3 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 7x^2 + 588x = 0 \begin{cases} 28\,; \\ -21\,; \\ 0\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_{28} : \left(\begin{array}{ccc|c} -17 & -13 & -19 & 0 \\ -13 & -33 & -3 & 0 \\ -19 & -3 & -27 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 17F_2 - 13F_1 \\ F_3 \sim 17F_3 - 19F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -17 & -13 & -19 & 0 \\ 0 & 392 & -196 & 0 \\ 0 & -196 & 98 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 2F_3 + F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -17 & -13 & -19 & 0 \\ 0 & 392 & -196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -3y$ i $z = 2y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (-3y, y, 2y) = y(-3, 1, 2)$$

i una base de S_{28} és $\{(-3, 1, 2)\}$.

$$S_{-21}: \left(\begin{array}{ccc|c} 32 & -13 & -19 & 0 \\ -13 & 16 & -3 & 0 \\ -19 & -3 & 22 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 32F_2+13F_1 \\ F_3\sim 32F_3+19F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 32 & -13 & -19 & 0 \\ 0 & 343 & -343 & 0 \\ 0 & -343 & 343 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 32 & -13 & -19 & 0 \\ 0 & 343 & -343 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = z$ i $y = z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$$

i una base de S_{-21} és $\{(1, 1, 1)\}$.

I el vector propi de valor propi 0 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -4).$$

I com que

$$f' = 11 \cdot 0^2 - 5 \cdot 3^2 + (-5)^2 - 26 \cdot 0 \cdot 3 - 38 \cdot 0 \cdot (-5) - 6 \cdot 3 \cdot (-5) - 112 \cdot 0 + 28 \cdot (-5) - 14 = -84,$$

s'obté l'equació

$$28x'^2 - 21y'^2 - 84 = 0.$$

Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és el cilindre hiperbòlic que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(0, 3, -5); \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 5, -4)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Exercici 22

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4y + 26x + 2y + 2z + 11 = 0.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f = 11.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & -13 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 5F_2+F_1 \\ F_3\sim 5F_3+F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & -13 \\ 0 & 9 & 9 & -18 \\ 0 & 9 & 9 & -18 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & -13 \\ 0 & 9 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -3$ i $y = -2 - z$. Per tant, prenent $z = 0$ per exemple, tenim que un centre és el punt $(-3, -2, 0)$ i és una quàdrica amb centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & 2 \\ -1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 9x^2 - 18x = 0 \begin{cases} 3\,; \\ 6\,; \\ 0\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de Q:

$$S_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2+F_1 \\ F_3\sim 2F_3+F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = z$ i $y = z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$$

i una base de S_3 és $\{(1, 1, 1)\}$.

$$S_6 : \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_2-F_1 \\ F_3\sim F_3-F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -2z$ i $y = z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (-2z, z, z) = z(-2, 1, 1)$$

i una base de S_6 és $\{(-2, 1, 1\}$.

I el vector propi de valor propi 0 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, 3) \sim (0, -1, 1)\,.$$

I com que

$$f' = 5\cdot(-3)^2+2\cdot(-2)^2+2\cdot 0^2-2\cdot(-3)\cdot(-2)-2\cdot(-3)\cdot 0+4\cdot(-2)\cdot 0+26\cdot(-3)+2\cdot(-2)+2\cdot 0+11 = -30\,,$$

s'obté l'equació

$$3x'^2 + 6y'^2 - 30 = 0\,.$$

Per tant, aïllant, es té que la quàdrica és el cilindre el·líptic que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(-3,-2,0);\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$$

té equació reduïda

$$\frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{5} = 1\,.$$

Exercici 23

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 12xy - 12xz - 2x + 24y + 14z - 5 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -5\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -6 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -4 & -7 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 3F_2+2F_1 \\ F_3\sim 3F_3+2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -34 \\ 0 & -2 & -4 & -19 \end{array}\right)_{F_3\sim 3F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right),$$

que és incompatible. Per tant, és una quàdrica sense centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 9-x & -6 & -6 \\ -6 & 2-x & 0 \\ -6 & 0 & -4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 7x^2 + 98x = 0 \begin{cases} 14 \text{ (simple)}\,; \\ -7 \text{ (simple)}\,; \\ 0 \text{ (simple)}\,. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de valors propis no nuls de Q:

$$S_{14}: \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -18 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 6F_1-5F_2 \\ F_3\sim 5F_3-6F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & -36 & 0 \\ 0 & 12 & -18 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim 2F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = -3z$ i $y = \frac{3}{2}z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = \left(-3z, \frac{3}{2}z, z\right) = z\left(-3, \frac{3}{2}, 1\right)$$

i una base de S_{14} és $\{(-3, \frac{3}{2}, 1)\}$ o, equivalentment, $\{(-6, 3, 2)\}$.

$$S_{-7} : \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 \sim 8F_2 + 3F_1 \\ F_3 \sim 8F_3 + 3F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 54 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right)_{F_3 \sim 6F_3 + F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 54 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = \frac{3}{2}y$ i $z = 3y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}y, y, 3y\right) = y\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$$

i una base de S_7 és $\{(\frac{3}{2}, 1, 3)\}$ o, equivalentment, $\{(3, 2, 6)\}$.

I el vector propi de valor propi 0 el podem trobar fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (14, 42, -21) \simeq (2, 6, -3).$$

Aleshores, l'eix de simetria és la intersecció dels dos plans de simetria:

$$\left.\begin{array}{r} (-6, 3, 2) \cdot [14(x, y, z) + (-1, 12, 7)] = 0 \\ (3, 2, 6) \cdot [-7(x, y, z) + (-1, 12, 7)] = 0 \end{array}\right\},$$

és a dir,

$$\left.\begin{array}{r} -6x + 3y + 2z + 4 = 0 \\ -3x - 2y - 6z + 9 = 0 \end{array}\right\}.$$

Llavors, prenent per exemple $y = 0$, queda $x = 1$ i $z = 1$ i es té que $(1, 0, 1)$ és un punt de pas. A més, el vector director és el vector propi de valor propi 0: $(2, 6, -3)$.

I substituint les equacions paramètriques

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha \\ y = 6\alpha \\ z = 1 - 3\alpha \end{array}\right\}$$

de l'eix de simetria a l'equació original de la quàdrica, s'obté

$$9(1+2\alpha)^2 + 2(6\alpha)^2 - 4(1-3\alpha)^2 - 12(1+2\alpha)6\alpha - 12(1+2\alpha)(1-3\alpha) - 2(1+2\alpha) + 24 \cdot 6\alpha + 14(1-3\alpha) - 5 = 0,$$

és a dir,

$$104\alpha = 0,$$

d'on $\alpha = 0$. Per tant, el vèrtex és el punt

$$(1, 0, 1).$$

A més, l'equació queda

$$14x'^2 - 7y'^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}(2,6,-3)\cdot(-1,12,7)\right) z' = 0$$

o, el que és el mateix,

$$14x'^2 - 7y'^2 + 14z' = 0\,.$$

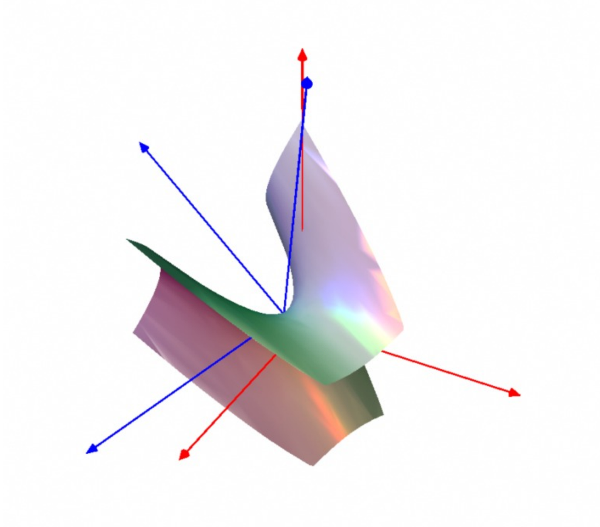
I en definitiva, aïllant, es té que la quàdrica és el paraboloide hiperbòlic que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,0,1);\ \frac{1}{7}(-6,3,2), \frac{1}{7}(3,2,6), \frac{1}{7}(2,6,-3)\right\}$$

té equació reduïda

$$z' = -x'^2 + \frac{y'^2}{2}\,.$$

Nota: El seu gràfic és



Exercici 24

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$8x^2 + 29y^2 + 29z^2 - 24xy + 24xz - 14yz - 60x - 86y + 218z - 91 = 0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 12 \\ -12 & 29 & -7 \\ 12 & -7 & 29 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -30 \\ -43 \\ 109 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = -91\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 12 \\ -12 & 29 & -7 \\ 12 & -7 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -43 \\ 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 12 & 30 \\ -12 & 29 & -7 & 43 \\ 12 & -7 & 29 & -109 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 2F_2+3F_1 \\ F_3\sim 2F_3-3F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 12 & 30 \\ 0 & 22 & 22 & 176 \\ 0 & 22 & 22 & -2088 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3-F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 12 & 30 \\ 0 & 22 & 22 & 176 \\ 0 & 0 & 0 & -2264 \end{array}\right),$$

que és incompatible. Per tant, és una quàdrica sense centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 8-x & -12 & 12 \\ -12 & 29-x & -7 \\ 12 & -7 & 29-x \end{vmatrix} = -x^3 - 72x^2 - 2072x = 0 \begin{cases} 22 \text{ (simple)}; \\ 44 \text{ (simple)}; \\ 0 \text{ (simple)}. \end{cases}$$

Calculem els vectors propis de valors propis no nuls de Q:

$$S_{22} : \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & -12 & 12 & 0 \\ -12 & 7 & -7 & 0 \\ 12 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim 7F_2-6F_1 \\ F_3\sim 7F_3+6F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 121 & -121 & 0 \\ 0 & -121 & 121 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 121 & -121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = 0$ i $z = y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (0, y, y) = y\,(0, 1, 1)$$

i una base de S_{22} és $\{(0, 1, 1)\}$.

$$S_{44} : \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & 12 & 0 \\ -12 & -15 & -7 & 0 \\ 12 & -7 & -15 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2\sim F_1-3F_2 \\ F_3\sim 3F_3+F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 33 & 33 & 0 \\ 0 & -33 & -33 & 0 \end{array}\right)_{F_3\sim F_3+F_2}$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 33 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = \frac{2}{3}z$ i $y = -z$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}z, -z, z\right) = z\left(\frac{2}{3}, -1, 1\right)$$

i una base de S_{44} és $\{(\frac{2}{3}, -1, 1)\}$ o, equivalentment, $\{(2, -3, 3)\}$.

I el vector propi de valor propi 0 el podem trobar fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (6, 2, -2) \simeq (3, 1, -1).$$

Aleshores, l'eix de simetria és la intersecció dels dos plans de simetria:

$$\left.\begin{array}{r} (0, 1, 1) \cdot [22(x, y, z) + (-30, -43, 109)] = 0 \\ (2, -3, 3) \cdot [44(x, y, z) + (-30, -43, 109)] = 0 \end{array}\right\},$$

és a dir,

$$\left.\begin{aligned} 22y+22z+66&=0\\ 88x-132y+132z+396&=0 \end{aligned}\right\}$$

o bé

$$\left.\begin{aligned} y+z+3&=0\\ 2x-3y+3z+9&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Llavors, prenent per exemple $x=0$, queda $y=0$ i $z=-3$ i es té que $(0,0,-3)$ és un punt de pas. A més, el vector director és el vector propi de valor propi 0: $(3,1,-1)$.

I substituint les equacions paramètriques

$$\left.\begin{aligned} x&=3\alpha\\ y&=\alpha\\ z&=-3-\alpha \end{aligned}\right\}$$

de l'eix de simetria a l'equació original de la quàdrica, s'obté

$$8(3\alpha)^2+29\alpha^2+29(-3-\alpha)^2-24\cdot 3\alpha\cdot\alpha+24\cdot 3\alpha(-3-\alpha)-14\alpha(-3-\alpha)-60\cdot 3\alpha-86\alpha+218(-3-\alpha)-91=0$$

o bé

$$-484\alpha-484=0\,,$$

d'on es té que $\alpha=-1$. Per tant, el vèrtex és el punt

$$(-3,-1,-2)\,.$$

A més, l'equació queda

$$22x'^2+44y'^2+2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)\cdot(-30,-43,109)\right)z'=0$$

o, equivalentment,

$$22x'^2+44y'^2-\frac{1}{\sqrt{11}}242z'=0\,.$$

I en definitiva, aïllant, es té que la quàdrica és el paraboloide el·líptic que en la referència principal

$$\mathcal{R}'=\left\{(-3,-1,-2);\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{22}}(2,-3,3),\ \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)\right\}$$

té equació reduïda

$$z'=\frac{x'^2}{22\sqrt{11}}+\frac{y'^2}{11\sqrt{11}}\,.$$

Exercici 25

Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-48x-24y+84=0\,.$$

Solució

En primer lloc, les matrius respectives de la part quadràtica, la part lineal i el terme independent són

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f = 84\,.$$

Llavors, els centres d'aquesta quàdrica s'obtenen resolent el sistema lineal $QX + L = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment, $QX = -L$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \end{array}\right),$$

que, evidentment, és incompatible. Per tant, és una quàdrica sense centre.

El valors propis de la matriu Q són les arrels del seu polinomi característic:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 = -x^2(x-6) = 0 \begin{cases} 6 \text{ (simple)}; \\ 0 \text{ (doble)}. \end{cases}$$

Calculem el vector propi corresponent al valor propi no nul de Q:

$$S_6 : \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \sim 5F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 5F_3 + 2F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \sim 2F_3 + F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que té solució $x = y$ i $z = 2y$. Per tant, els vectors són de la forma

$$(x, y, z) = (y, y, 2y) = y(1, 1, 2)$$

i una base de S_6 és $\{(1, 1, 2)\}$.

El primer vector propi de valor propi 0 el trobem fent el producte vectorial del vector propi anterior i de $\vec{l}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -24 & -12 & 0 \end{vmatrix} = (24, -48, 12) \simeq (2, -4, 1);$$

i el segon vector propi de valor propi 0 el trobem fent el producte vectorial dels dos vectors propis anteriors:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (9, 3, -6) \simeq (3, 1, -2)\,.$$

Aleshores, l'eix de simetria obtingut ve donat per la intersecció dels plans de simetria

$$\left.\begin{array}{r} (1, 1, 2) \cdot [6(x, y, z) + (-24, -12, 0)] = 0 \\ (2, -4, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \end{array}\right\},$$

és a dir,

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \end{aligned}\right\} .$$

Llavors, per a $z = 0$ és $x = 4$ i $y = 2$ i un punt de pas és el $(4, 2, 0)$. A més, el vector director és el darrer vector propi de valor propi 0: $(3, 1, -2)$.

I substituint les equacions paramètriques

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 + 3\alpha \\ y &= 2 + \alpha \\ z &= -2\alpha \end{aligned}\right\}$$

de l'eix de simetria a l'equació original de la quàdrica, s'obté

$$\begin{gathered}(4 + 3\alpha)^2 + (2 + \alpha)^2 + 4(-2\alpha)^2 + 2(4 + 3\alpha)(2 + \alpha) + 4(4 + 3\alpha)(-2\alpha) + 4(2 + \alpha)(-2\alpha) \\ -48(4 + 3\alpha) - 24(2 + \alpha) + 84 = 0\,,\end{gathered}$$

és a dir,

$$-168\alpha - 120 = 0\,,$$

d'on $\alpha = -\frac{5}{7}$. Per tant, el vèrtex és el punt

$$\left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right).$$

A més, l'equació queda

$$6x'^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2) \cdot (-24, -12, 0)\right) z' = 0$$

o, el que és el mateix,

$$6x'^2 - 12\sqrt{14}z' = 0\,.$$

I en definitiva, aïllant, es té que la quàdrica és el cilindre parabòlic que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{\left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right); \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1), \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)\right\}$$

té equació reduïda

$$z' = \frac{x'^2}{2\sqrt{14}}\,.$$

Nota: El seu gràfic és