UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques
Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Departament de Matemàtiques

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Àlgebra Lineal. Exercicis

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1 de febrer de 2024

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques
Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Àlgebra Lineal. Exercicis

Rafel Amer
Francesc Carreras
Enric Monsó
José M. Moreno
Miquel Noguera
María Jesús Pérez
Julian Pfeifle
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Escola Superior d'Enginyeries Industrial
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1 de febrer de 2024

Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
Colom 11
08222 Terrassa

`rafel.amer@upc.edu`

Introducció

Aquesta col·lecció d'exercicis d'Àlgebra Lineal és el resultat de les classes impartides per la Secció del Departament de Matemàtiques a l'Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa des de la posada en marxa del nou pla d'estudis.

S'han inclòs exercicis similars als explicats a classe per tal d'aconseguir una major comprensió dels conceptes teòrics desenvolupats juntament amb d'altres d'un major grau de dificultat que intenten aclarir aquells punts en els quals hem constatat que els estudiants tenen més dificultats. No cal oblidar, però, que per assolir aquesta comprensió és imprescindible l'esforç i el treball personal, tant pel que fa a l'estudi dels conceptes com a la resolució dels exercicis. Esperem que sigui d'utilitat als estudiants i els aconsellem que intentin resoldre els problemes abans de llegir la solució. En molts casos, segurament, trobaran solucions alternatives a les donades.

Els temes que es tracten són habituals en qualsevol curs d'Àlgebra Lineal i s'ha dedicat especial atenció als seus aspectes geomètrics. Així, els dos últims capítols estan dedicats a la Geometria lineal i a l'estudi de les còniques i les quàdriques.

Encara que, inicialment, els exercicis estiguin pensats per a estudiants de Graus d'Enginyeria, també poden ser útils als estudiants de Matemàtiques, Física i, en general, a tots aquells que hagin de cursar la matèria d'Àlgebra Lineal.

Rafel Amer, Francesc Carreras, Enric Monsó, José Miguel Moreno, Miquel Noguera, María Jesús Pérez, Julian Pfeifle, Vicenç Sales i Josep Tudurí

Índex

Capítol 1

Matrius i sistemes d'equacions lineals

1. Si A, B i C són les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu la matriu $AB + AC$.

2. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

calculeu les matrius següents: (a) $2A + 3B$, (b) $3A - B$ i (c) $-2A - B$.

3. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu les matrius AB i BA.

4. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

calculeu les matrius AB i BA.

5. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

calculeu les matrius següents: (a) A^2B, (b) ABA, (c) BAB i (d) AB^2.

6. Digueu quines de les matrius següents estan en forma triangular o esglaonada:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Digueu quins són els rangs de les matrius de l'exercici anterior.

8. Apliqueu la transformació elemental $F_2 \sim 2F_2 + 3F_1$ a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i comproveu que aquesta transformació és equivalent al producte BA, on

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Donada una matriu quadrada A, d'ordre 3, apliquem les transformacions elementals per files següents:

- En primer lloc, $F_2 \sim F_1 - F_2$ i $F_3 \sim 3F_1 + 3F_3$ per a obtenir la matriu A'.
- En segon lloc, a la matriu A' li apliquem $F_3 \sim -3F_2 + 2F_3$ per a obtenir la matriu B.

Trobeu una matriu T tal que $B = TA$

10. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix};$$

(a) Quantes files i columnes tenen les matrius AB i BA.

(b) Expresseu la segona columna de la matriu AB com a combinació lineal de les columnes de A.

11. Donada la matriu

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

expresseu la quarta fila com a combinació lineal de les altres tres.

12. Trobeu una relació de dependència entre les files de la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Calculeu el rang de les matrius següents

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -8 & 2 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -9 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

14. Calculeu el rang de les matrius següents

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & -3 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 4 & 5 & 11 \\ -8 & 7 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Es consideren les matrius A i B següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les matrius $(AB)^t$ i $A^t B^t$.

16. Siguin A i B les matrius quadrades d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les matrius $(A+B)(A-B)$ i $A^2 - B^2$.

17. Analitzeu quines de les matrius següents són simètriques i quines ortogonals

$$\text{(a)}\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

18. Resoleu els següents sistemes d'equacions

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} -x + 3y &= -3 \\ -3x + 9y &= -9 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)} \left.\begin{aligned} -4x - 5y &= 2 \\ 9x + 13y &= -7 \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)} \left.\begin{aligned} -3x + 4y &= 6 \\ 5x - 7y &= -9 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(d)} \left.\begin{aligned} x + y &= -3 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(e)} \left.\begin{aligned} 3x + 6y &= 1 \\ 7x + 14y &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(f)} \left.\begin{aligned} -3x - 4y &= 3 \\ 7x + 10y &= -8 \end{aligned}\right\}.$$

19. Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents pel mètode de Gauss

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} -3x - 5y - 5z &= -1 \\ -2x - 3y - 3z &= -1 \\ 10x + 17y + 17z &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)} \left.\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ -3x - y - 14z &= -3 \\ -8x - 11y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)} \left.\begin{aligned} -x + y - 7z &= 1 \\ -2x - y &= -4 \\ -2x - 3y + 11z &= -8 \end{aligned}\right\}$$

20. Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents pel mètode de Gauss:

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 3z &= 3 \\ x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)} \left.\begin{aligned} 4x - 5y - z + t &= 9 \\ 3x - y + 2z - 2t &= 4 \\ 2x + y + 3z - 3t &= 1 \\ x + y + 2z - t &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)} \left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3x - y - 2z &= 4 \\ -4x + 3y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

21. Trobeu la solució general dels següents sistemes d'equacions lineals

(a) $\left.\begin{aligned} 2x+2y+2z-6t&=-9\\ -3x-3y-2z+10t&=15 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} -4x+3y-5z-2t&=0\\ 3x-2y+2z+2t&=2 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 5x+2y+3z-3t&=-1\\ 11x+4y+9z-6t&=-4\\ -8x-4y+6t&=-2 \end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} 2x+y+z-3t&=1\\ -5x-3y-2z+11t&=-5 \end{aligned}\right\}$

22. Resoleu els sistemes d'equacions lineals següents pel mètode de Gauss-Jordan

(a) $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=-1\\ x-y&=0 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} -2x-3y&=-3\\ -5x-7y&=-12 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} 3x-y&=2\\ 8x-5y&=6 \end{aligned}\right\}$

23. Resoleu simultàniament, pel mètode de Gauss–Jordan, els tres sistemes d'equacions lineals següents:

(a) $\left.\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+3y&=0\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+3y&=4\\ x-y&=2 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} x+y&=2\\ 2x+3y&=-2\\ x-y&=14 \end{aligned}\right\}$

24. Trobeu la inversa de les matrius següents

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -2\\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 4\\ -1 & 11 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & 3\\ 13 & 10 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1\\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 6\\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & -2\\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

25. Trobeu la inversa, si és possible, de les matrius següents pel mètode de Gauss–Jordan:

$$A=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&2&1\\ 0&1&3 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 0&1&2\\ 1&3&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} -1&1&0\\ 1&0&-1\\ 0&-1&1 \end{pmatrix}.$$

26. Sigui A i B dues matrius tals que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2&-1\\ 1&3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 4&-2\\ 2&3 \end{pmatrix},$$

calculeu la inversa de la matriu BA.

27. Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} -1&1\\ 1&1 \end{pmatrix},$$

calculeu A^{14} fent exactament cinc productes de matrius.

28. Sabent que la matriu

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} c&0&\sqrt{2}\\ 1&b&0\\ a&1&0 \end{pmatrix}$$

és ortogonal, determineu els valors de a, b i c.

Annex

29. Tres productes A, B i C contenen els percentatges següents de Fe, Zn i Cu, a més d'impureses:

	Fe	Zn	Cu
A	47%	25%	21%
B	38%	25%	29%
C	27%	54%	15%

Quin percentatge de cada producte hem de combinar per obtenir un compost que contingui el 44% de Fe, el 34% de Zn i el 22% de Cu, tenint en compte que durant el procés d'obtenció del compost s'eliminen les impureses?

Capítol 2

Determinants

1. Calculeu els determinants d'ordre 2 següents:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$ (j) $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}$

2. Calculeu els determinants d'ordre 3 següents:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

3. Calculeu els dos determinants següents fent servir exclusivament el mètode de Gauss

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & -5 \\ 5 & -1 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 & -5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

4. Calculeu els dos determinants següents fent servir exclusivament el mètode de Laplace

(a) $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & -4 & -3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5. Calculeu els dos determinants següents combinant els mètodes de Gauss i de Laplace

(a) $\begin{vmatrix} -4 & -1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -3 & -5 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$

6. Representem les columnes de la matriu quadrada d'ordre 4 A per

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

i sabem que $\det A = 2$. Digueu quins són els determinants de les matrius següents:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} C_2 & C_3 & C_1 & C_4 \end{pmatrix}$.

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} C_3 & C_4 & C_1 & C_2 \end{pmatrix}$.

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} C_4 & C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$.

(d) $A_4 = \begin{pmatrix} C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \end{pmatrix}$.

(e) $A_5 = \begin{pmatrix} C_2 & 3C_4 & 4C_1 & C_3 \end{pmatrix}$.

7. En una matriu amb 7 files i 8 columnes, quants menors d'ordre 3 existeixen? I en una de 10 files i 8 columnes?

8. Calculeu el rang de les matrius següents fent servir únicament el càlcul de menors.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & -11 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -3 & -6 & 2 \\ 3 & -11 & 10 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 & 1 & -4 & 8 \\ -6 & -5 & -2 & 0 & -6 & 10 \\ 2 & 1 & 12 & -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -4 & 7 & -7 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -7 \\ -6 & 6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ -9 & -6 & -8 & 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

9. En una matriu de 8 files i 10 columnes hem trobat un menor d'ordre 3 no nul. Si el rang de la matriu és 3, quin és el nombre mínim de menors d'ordre 4 que hem de calcular (i veure que són nuls) per poder-ho assegurar?

10. En un sistema de 10 equacions amb 12 incògnites, hem trobat un menor d'ordre 5 no nul de la matriu dels coeficients de les incògnites. Quants menors d'ordre 6 de la matriu dels coeficients de les incògnites hem de calcular (i comprovar que són nuls) per poder assegurar que el seu rang és 5? Al final sabem que el sistema és compatible indeterminat, quants menors addicionals hem calculat? Quin és el nombre de graus de llibertat del sistema?

11. Calculeu les inverses de les matrius següents

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

12. Calculeu les inverses de les matrius següents

(a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13. Resoleu els següents sistemes d'equacions obtenint la inversa de la matriu dels coeficients de les incògnites

(a) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 2 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ -2x - y &= -3 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ 2x - 6y &= -9 \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x + 4y &= 12 \end{aligned}\right\}$ (e) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$ (f) $\left.\begin{aligned} -2x - y &= -2 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$

14. Resoleu els següents sistemes d'equacions mitjançant la regla de Cramer

(a) $\left.\begin{aligned} -2x + 4y &= -2 \\ -7x + 13y &= -5 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 4x - 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} 4x + 2y &= -2 \\ 9x + 6y &= -5 \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} 4x + y &= -3 \\ -13x - 4y &= 12 \end{aligned}\right\}$ (e) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -2 \\ -x + y &= -2 \end{aligned}\right\}$ (f) $\left.\begin{aligned} 3x + 3y &= -3 \\ 8x + 7y &= -9 \end{aligned}\right\}$

15. Resoleu els següents sistemes d'equacions mitjançant la regla de Cramer

(a) $\left.\begin{aligned} -3x - 2y + z &= -1 \\ x - 4y + 3z &= 1 \\ x - 5y + 4z &= 1 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -1 \\ 3x + y + 2z &= 3 \\ -2x - 3y - 2z &= -5 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y - 5z &= 1 \\ -x + y + 4z &= 1 \\ -2x + 3y + 2z &= -2 \end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} -2x - 3y - 2z &= 5 \\ x + 2y + z &= -2 \\ -x - 2y - 4z &= -2 \end{aligned}\right\}$

16. Resoleu els següents sistemes d'equacions pel mètode de Cramer

(a) $\left.\begin{aligned} 2x - y - 3z - 3t &= -2 \\ -x + y + 2z + t &= 1 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} -2x - 4y + 5z + 4t &= -2 \\ x + 3y - 4z - t &= 2 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} -2x - 2y - 2z + 3t &= 2 \\ -x - 2y - 3z + 2t &= 2 \end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} x - y - z + t &= 3 \\ x - 3y - z - t &= 5 \end{aligned}\right\}$

17. Determineu si els següents sistemes d'equacions són compatibles o incompatibles. En cas que siguin compatibles, trobeu la solució, tot pel mètode de Cramer.

(a) $\left.\begin{aligned} x-2y-5z&=3\\ x+y-2z&=2\\ -x+y+4z&=-2\end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} -x+2y+4z&=-3\\ x-2y-4z&=3\\ -x+2y+5z&=-5\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 2x-2y+z&=3\\ x-y-z&=1\\ x+y+2z&=3\end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} -x+2y+z&=1\\ -2x+4y+3z&=1\\ -x+2y+z&=1\end{aligned}\right\}$

18. Resoleu els següents sistemes d'equacions pel mètode de Cramer

(a) $\left.\begin{aligned} -3x+2y-2z-2t&=-1\\ -4x+2y-2z-3t&=-2\\ -5x+2y-2z-4t&=-3\end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+2z+t&=-4\\ x+3y+4z+2t&=-2\\ x+4y+4z+t&=-4\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} -3x-y-z+t&=3\\ -2x-4y-3z+4t&=2\\ 3x+y+z-t&=-3\end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} 2x+3y-z+3t&=3\\ x-4y+z+t&=-2\\ 2x+4y-z+3t&=4\end{aligned}\right\}$

19. Estudieu els següents sistemes d'equacions en funció del paràmetre m i resoleu-lo en els casos en que sigui compatible.

(a) $\left.\begin{aligned} mx+y&=3\\ 3x+y&=1\end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x+my&=m+1\\ mx+y&=2\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=m+1\\ mx+y&=3\\ 2x+my&=2m\end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} m^2x+3y+z&=1\\ 2mx+2y+z&=-1\end{aligned}\right\}.$

20. Es considera el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} &x+y+(\alpha+1)z=\alpha+1\\ &x+(\alpha+1)y+z=\alpha^2+1\\ &(\alpha+1)x+y+z=1\end{aligned}\right\}.$$

(a) Analitzeu el seu caràcter en funció del paràmetre α pel mètode dels menors.

(b) Resoleu–lo pel mètode de Cramer en els casos en què sigui compatible.

21. Determineu els valors de λ per als quals els següents sistemes d'equacions són compatibles indeterminats.

(a) $\left.\begin{aligned} -5x+3y&=\lambda x\\ -6x+4y&=\lambda y\end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} 6x+2y&=\lambda x\\ -6x-y&=\lambda y\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 5x+y+2z&=\lambda x\\ -6x+2y-6z&=\lambda y\\ -6x-y-3z&=\lambda z\end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} -5x-2y+2z&=\lambda x\\ 4x+y-4z&=\lambda y\\ 4x+4y+5z&=\lambda z\end{aligned}\right\}.$

Annex

22. Utilitzant el fet que els nombres 21375, 38798, 34162, 40223 i 79154 són tots divisibles per 19, deduïu que el determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

és divisible per 19 sense calcular-lo. (*Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications*, Howard Anton i Chris Rorres, 2011).

Capítol 3

Vectors al pla i a l'espai

1. Donats els vectors $\vec{u}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{u}_2 = (3, 1, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, 2, 2)$, calculeu els vectors

(a) $3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ (b) $\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ (c) $-5\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$

2. Donats els vectors $\vec{u}_1 = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{u}_2 = -5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ i $\vec{u}_3 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, calculeu els vectors

(a) $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ (b) $25\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ (c) $2\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$

3. Contesteu cada un dels apartats següents:

(a) Expresseu el vector $(7, 2)$ com a combinació lineal dels vectors $(1, 2)$ i $(-1, 1)$.

(b) Determineu si el vector $(1, 3, 8)$ és o no combinació lineal dels vectors $(1, 2, 3)$ i $(1, 1, -2)$.

(c) Expresseu, si és possible, el vector $\vec{u} = \vec{\imath} + 11\vec{\jmath} - 5\vec{k}$ com a combinació lineal dels vectors $2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ i $\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$.

(d) Digueu si el vector $(3, -1, 2)$ és o no combinació lineal dels vectors $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ i $(2, 3, 4)$.

4. Trobeu una relació de dependència entre els vectors $(3, 3, 3)$, $(-2, -2, 3)$, $(2, -3, 3)$ i $(1, 1, 2)$.

5. Aïlleu el vector $\vec{x}$ de la següent igualtat entre vectors

$$-5(\vec{u} - \vec{x}) = -\vec{u} - 2(-\vec{x} + 3\vec{v})\,.$$

6. De les següents llistes de vectors, digueu quins són linealment independents i quines són linealment dependents.

(a) $(-1, -2, 1)$, $(2, 5, -2)$ i $(2, 6, -1)$.

(b) $(2, -3, 5)$ i $(-1, 2, 4)$.

(c) $(1, -1, 1)$, $(1, 2, -3)$, $(2, 1, 0)$ i $(3, -1, 0)$.

(d) $(1, 2)$, $(0, 0)$ i $(3, -1)$.

7. De les següents llistes de vectors, digueu quins són linealment independents i quines són linealment dependents.

(a) $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

(b) $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}, 2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

(c) $-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}, -2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}, 2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-3\vec{k}$.

(d) $\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}, -\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+3\vec{k}, \vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$.

8. En cada un dels apartats següents hi ha un vector $\vec{u}$ i una base $\mathcal{B}'$. Calculeu, en cada cas, les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}'$.

(a) $\vec{u}=(9,7)$ i $\mathcal{B}'=\{(-1,2),(1,3)\}$.

(b) $\vec{u}=(12,3,15)$ i $\mathcal{B}'=\{(4,2,3),(2,5,2),(1,1,4)\}$.

(c) $\vec{u}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-\vec{k}$ i $\mathcal{B}'=\{2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}, \vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}\}$.

9. Representeu gràficament el vector que en la base $\mathcal{B}'=\{(1,-1),(1,2)\}$ té components $(3,3)$. Quines components té en la base canònica?

10. Representeu gràficament una base $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ no ortonormal i els vectors que en aquesta base tenen components $(-3,3)$, $(5,2)$ i $(-4,-3)$.

11. Analitzeu si el sistema de vectors

$$\{(1,-2,-2),(1,-1,-2),(1,0,-1)\}$$

és una base de V_3 i, en cas afirmatiu, determineu les components del vector $(3,-2,3)$ en aquesta base.

12. Considerem pla vectorial generat pels vectors $(1,-2,1)$ i $(2,1,1)$. Digueu quins dels següents vectors pertanyen al pla i quins no hi pertanyen.

(a) $(1,-7,2)$ (b) $(13,-6,9)$ (c) $(1,1,1)$ (d) $(-3,1,5)$ (e) $(3,-1,2)$
(f) $(1,2,-1)$ (g) $(0,5,-1)$ (h) $(1,3,0)$ (i) $(4,-3,3)$ (j) $(1,3,-1)$

13. La recta vectorial de V_3 té equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ x-2y+z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Digueu quins dels següents vectors pertanyen a la recta i quins no hi pertanyen.

(a) $(1,5,3)$ (b) $(-5,-1,3)$ (c) $\frac{1}{2}(5,1,-3)$ (d) $(1,-1,2)$ (e) $(1,1,3)$

14. A partir del generador de cada una de les rectes següents de V_2, trobeu la seva equació implícita

(a) $(4,2)$ (b) $\frac{1}{2}(3,-1)$ (c) $(1,5)$ (d) $\frac{1}{4}(3,7)$ (e) $(-3,2)$

15. A partir del generador de cada una de les rectes següents de V_3, trobeu les seves equacions implícites

(a) $(3,-1,4)$ (b) $(2,1,1)$ (c) $(1,0,3)$ (d) $(-4,2,4)$ (e) $(0,0,1)$

16. A partir dels generadors del plans vectorials de V_3 següents, trobeu la seva equació implícita.

(a) $(1,1,1),(2,3,2)$ (b) $(1,2,-1),(2,3,-4)$ (c) $(-1,-1,2),(2,3,-3)$
(d) $(1,-2,-2),(-1,3,3)$ (e) $(1,-2,1),(1,-1,3)$ (f) $(1,1,1),(1,2,2)$
(g) $(-1,1,-2),(-2,3,-3)$ (h) $(-1,3,-2),(1,-2,1)$ (i) $(-1,1,1),(-1,2,1)$

17. Per a cada una de les rectes vectorials de V_3 definides per les equacions implícites següents, trobeu-ne un generador.

(a) $\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} -x+3y-3z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{array}\right\}$ (c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=0 \\ -x+3y-3z=0 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{array}\right\}$ (e) $\left.\begin{array}{r} -x-4y-3z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{array}\right\}$ (f) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ -2x+y-z=0 \end{array}\right\}$

(g) $\left.\begin{array}{r} -x-2y-2z=0 \\ x+y+4z=0 \end{array}\right\}$ (h) $\left.\begin{array}{r} -x-2y+2z=0 \\ -x-3y-z=0 \end{array}\right\}$ (i) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ -x+3y+4z=0 \end{array}\right\}$

18. Per a cada una de les bases següents escriviu les expressions del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a la base canònica i les del canvi de base de la canònica a $\mathcal{B}'$.

(a) $\mathcal{B}' = \{(-2,-1),(2,2)\}$ (b) $\mathcal{B}' = \{(-2,-1),(1,2)\}$ (c) $\mathcal{B}' = \{(-3,-2),(-5,-4)\}$
(d) $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(-5,3)\}$ (e) $\mathcal{B}' = \{(-5,-3),(-2,-1)\}$ (f) $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(1,1)\}$

19. Per a cada una de les bases V_3 següents, fent servir les matrius del canvi de base, calculeu les components del vector $\vec{u} = (1,-1,1)$ en la base $\mathcal{B}'$.

(a) $\mathcal{B}' = \{(-3,-1,2),(-2,-1,1),(-1,-1,-1)\}$.

(b) $\mathcal{B}' = \{(-2,1,1),(-1,2,1),(3,-2,-2)\}$.

(c) $\mathcal{B}' = \{(-3,1,1),(-1,-1,-3),(-2,1,2)\}$.

(d) $\mathcal{B}' = \{(-3,2,-2),(2,-1,1),(-1,3,-1)\}$.

20. Representeu gràficament la base $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(1,2)\}$, els eixos de coordenades corresponents i la recta vectorial d'equació $2x+y=0$. Quina serà la seva equació en la base $\mathcal{B}'$?

21. Per a cada una de les base següents, trobeu l'equació en la base canònica de la recta vectorial que en la base $\mathcal{B}'$ té equació $3x'-y'=0$.

(a) $\mathcal{B}' = \{(1,-3),(1,2)\}$ (b) $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,2)\}$
(c) $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-3,1)\}$ (d) $\mathcal{B}' = \{(2,3),(-1,1)\}$

22. Es considera la base $\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,2)\}$ de V_3

(a) Trobeu l'equació implícita en la base $\mathcal{B}'$ del pla vectorial que en la base canònica té equació $x+y+z=0$.

(b) Trobeu l'equació implícita en la base canònica del pla vectorial que en la base $\mathcal{B}'$ té equació $2x'+3y'+3z'=0$.

23. Donades les bases $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ de V_2, trobeu en cada cas l'expressió del canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$.

(a) $\mathcal{B}' = \{(1,-3),(1,2)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(1,1),(-1,2)\}$ (b) $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-3,1)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(2,3),(-1,1)\}$
(c) $\mathcal{B}' = \{(1,-3),(1,2)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(2,3),(-1,1)\}$ (d) $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,2)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(1,-3),(1,2)\}$

24. Donades les bases $\mathcal{B}' = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ i $\mathcal{B}'' = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ de V_3

(a) Calculeu la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}''$ a la base $\mathcal{B}'$.

(b) Trobeu l'equació en la base $\mathcal{B}''$ del pla vectorial que en la base $\mathcal{B}'$ té equació $x'+2y'+z'=0$.

25. Donats els vectors $\vec{u}_1 = (1,3,-1)$, $\vec{u}_2 = (2,1,-1)$, $\vec{u}_3 = (3,2,1)$ i $\vec{u}_4 = (4,2,-1)$, calculeu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4$, $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$, $||\vec{u}_4||$ i $||\vec{u}_2 + \vec{u}_4||$.

26. Calculeu l'angle format entre els vectors $(-1, 3, 2)$ i $(-3, 2, -1)$.

27. Per a quins valors de t el vectors $(-2, 3, 4)$ i $(t^2 + t, t^2, -2)$ són perpendiculars?

28. Sigui $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de V_2 tal que $||\vec{e}_1|| = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1$ i $||\vec{e}_2|| = \sqrt{2}$. Escriviu la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'$.
Donats els vectors $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ i $\vec{u}_4 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, feu servir aquesta matriu per calcular $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4$, $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$, $||\vec{u}_4||$ i $||\vec{u}_2 + \vec{u}_4||$.

29. En cada un dels casos següents trobeu un vector perpendicular als plans vectorials generats pels vectors

(a) $(1, -1, 1), (-4, 3, -1)$ (b) $(1, -1, -2), (1, -2, -1)$ (c) $(-1, 3, -1), (-1, 4, -2)$
(d) $(1, 2, 3), (1, 3, 4)$ (e) $(1, 2, 3), (1, 3, 3)$ (f) $(-1, 1, -2), (-1, 2, -1)$

30. En cada un dels casos següents trobeu un vector perpendicular als plans vectorials que tenen equació implícita

(a) $4x + 3y - z = 0$ (b) $x - 3y - 3z = 0$ (c) $4x + 2y + z = 0$ (d) $x + y - z = 0$
(e) $-3x + y - 2z = 0$ (f) $x + 3y - 4z = 0$ (g) $3x + 2y - 3z = 0$ (h) $-2x + 2y + z = 0$

31. Per a cada una de les rectes vectorials de V_3 definides per les equacions implícites següents, trobeu una base del pla perpendicular.

(a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 4z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ (c) $\left.\begin{array}{r} x - 4y + 4z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{array}\right\}$

(d) $\left.\begin{array}{r} -x + 4y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{array}\right\}$ (e) $\left.\begin{array}{r} -x - 4y + z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ (f) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 2z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{array}\right\}$

32. Siguin $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de V_2 tal que $||\vec{e}_1|| = 2$, $||\vec{e}_2|| = 1$ i formen un angle de $60°$ i els vectors $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ i $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

(a) Calculeu $\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$, $\vec{e}_2 \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_3)$, $||\vec{u}_2||$ i $||\vec{e}_1 + \vec{e}_2||$.

(b) Representeu gràficament la base $\mathcal{B}'$, els eixos de coordenades corresponents i el vector $\vec{u} = (-3, 4)_{\mathcal{B}'}$. Calculeu la longitud de $\vec{u}$ i comproveu-ho en el gràfic.

(c) Representeu un vector perpendicular al vector $\vec{u}$.

33. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{u} = (-5, 3)$ respecte a cada una de les rectes vectorials següents.

(a) $2x - y = 0$ (b) $x + y = 0$ (c) $2x + y = 0$ (d) $x - 5y = 0$ (e) $y = 0$

34. Trobeu una base ortogonal (la solució no és única) de cada un dels plans vectorial següents.

(a) $x - y - z = 0$ (b) $2x + 3y - z = 0$ (c) $2x - 2y - 3z = 0$ (d) $x - 3y - 2z = 0$

35. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$ sobre els plans vectorials generats pels següents vectors.

(a) $(1, -1, 1), (-2, 1, -1)$ (b) $(1, -1, -2), (1, -2, -1)$ (c) $(-1, 1, -1), (-2, 1, -2)$

36. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{u} = (4, 3, 3)$ sobre les rectes vectorials que tenen les següents equacions implícites.

(a) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0\\ -2x-y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=0\\ x+y-z&=0 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} x+z&=0\\ x+y&=0 \end{aligned}\right\}$

37. Sigui P el pla vectorial de V_3 que en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2,-2),(-2,1,-2),(0,-1,1)\}$ té equació implícita

$$7x' + 7y' - 4z' = 0\,.$$

Trobeu un vector perpendicular al pla i una base ortogonal del pla.

38. Donats els vectors $\vec{u}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{u}_2 = (-2,2,-1)$ i $\vec{u}_3 = (-1,1,2)$, calculeu $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$, $(\vec{u}_1+2\vec{u}_2)\times\vec{u}_3$, $(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\times\vec{u}_3$ i $\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_3)$.

39. Les longituds de dos costats d'un triangle són 5 i 12 cm, respectivament, i l'angle que formen entre ells és de 120°. Calculeu la longitud de l'altre costat utilitzant vectors i productes escalars.

40. Dos costats adjacents d'un paral·lelogram tenen longituds de 5 i 8 m, respectivament, i formen un angle de 120°. Calculeu la longitud de les seves dues diagonals utilitzant vectors i productes escalars.

41. Sigui P és el pla de V_3 generat pels vectors $(1,-2,0)$ i $(0,-3,1)$.

(a) Determineu una base ortogonal de P.

(b) Calculeu una base ortonormal de P.

(c) Trobeu un generador de la recta R perpendicular a P.

(d) Determineu la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (1,3,-3)$ sobre P.

(e) Calculeu el simètric del vector $\vec{u} = (1,3,-3)$ respecte de P.

Annex

42. Representeu amb el Blender els vectors, rectes i plans vectorial següents:

(a) Els vectors $(3,4,7)$, $(2,-5,-4)$ i $(-5,2,6)$.

(b) Els vectors que en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)\right\}$$

tenen components $(3,4,7)_{\mathcal{B}'}$, $(2,-5,-4)_{\mathcal{B}'}$ i $(-5,2,6)_{\mathcal{B}'}$.

(c) Els vectors que en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\tfrac{1}{3}(-3,2,3), \tfrac{1}{2}(2,1,1), \tfrac{1}{2}(-1,3,1)\right\}$$

tenen components $(3,3,5)_{\mathcal{B}'}$, $(2,-3,-4)_{\mathcal{B}'}$ i $(-5,2,3)_{\mathcal{B}'}$.

(d) Tres vectors linealment independents i el pla vectorial generat pels dos primers.

(e) Tres vectors linealment dependents i el pla vectorial generat pels dos primers.

(f) El pla vectorial generat pels vectors $(1,2,3)$ i $(-2,1,2)$.

(g) El pla vectorial que en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\tfrac{1}{3}(-3,2,3), \tfrac{1}{2}(2,1,1), \tfrac{1}{2}(-1,3,1)\right\}$$

té equació $x' + y' + z' = 0$.

(h) El vector $\vec{u} = (3, 2, 10)$, el pla vectorial P generat pels vectors $(1, -1, 1)$ i $(2, 2, 1)$, la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre P i el simètric de $\vec{u}$ respecte P.

(i) El vector $\vec{u} = (3, 2, 10)$, la recta vectorial R generada pel vector $(1, -1, 1)$, la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre R i el simètric de $\vec{u}$ respecte R.

Capítol 4

Geometria al pla i a l'espai

1. Representeu gràficament les rectes d'equacions

(a) $x - 4y + 12 = 0$ (b) $x + 2y = 4$ (c) $2x + y = 4$ (d) $x - y + 2 = 0$

2. Trobeu l'equació implícita de les rectes que passen per a cada parella de punts següents.

(a) $(2, -1)$ i $(5, 4)$ (b) $(-1, 0)$ i $(4, -4)$ (c) $(4, -3)$ i $(-3, -1)$ (d) $(-1, -5)$ i $(4, 5)$
(e) $(-3, 5)$ i $(5, -3)$ (f) $(-1, -4)$ i $(-4, 0)$ (g) $(-1, 1)$ i $(-1, -2)$ (h) $(-4, -1)$ i $(5, 0)$

3. Escriviu les diferents equacions de la recta que passa pels punts $(-3, 2, 1)$ i $(0, 3, 2)$ i determineu si el punt $(3, 2, 3)$ hi pertany.

4. Determineu unes equacions implícites de la recta

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

5. Trobeu una equació vectorial del pla d'equació implícita $3x - 4y + z = 3$.

6. Determineu la recta que passa pel punt $(3, 1, 0)$ i és paral·lela a la recta d'equacions

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ 2x - 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

7. Escriviu l'equació contínua de la recta que té equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -x + 3y - z &= -4 \end{aligned}\right\}.$$

8. Dels següents sistemes d'equacions, digueu quins són equacions implícites de la recta que passa pel punt $(2, 1, -4)$ i té vector director $(1, -2, 1)$.

(a) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -2 \\ 2x + y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ x - z &= 6 \end{aligned}\right\}$ (c) $\left.\begin{aligned} x + z &= -2 \\ y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} y + 2z &= -7 \\ x + y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$ (e) $\left.\begin{aligned} x - y - 3z &= 13 \\ x - 5y - 11z &= 41 \end{aligned}\right\}$ (f) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 2x + 5y + 8z &= -23 \end{aligned}\right\}$

9. Escriviu les diferents equacions del pla que passa pel punt $(3, 1, 2)$ i té vectors directors $(-1, 1, 1)$ i $(2, 1, 2)$.

10. Escriviu unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita $3x - 5y - 2z = 3$.

11. Determineu si els punts $(17, -4, 5)$, $(-7, 0, 4)$, $(3, 0, -1)$ i $(1, 0, 0)$ estan continguts en el mateix pla i, en cas afirmatiu, trobeu l'equació d'aquest pla.

12. Trobeu el valor de α per al qual les rectes

$$(x, y, z) = (-4, 3, 2) + t(3, 3, 1) \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{array}{r} x + \alpha y - z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \end{array}\right\}$$

són perpendiculars.

13. Escriviu les equacions implícites de la recta paral·lela a l'eix de les y que passa pel punt $(-3, 4, 3)$.

14. Donats els punts $(1, 1, -2)$, $(-1, -2, -3)$ i $(2, 2, 0)$, trobeu l'equació del pla paral·lel al que passa per aquests tres punts i passa pel punt $(2, 1, -3)$.

15. Donada la recta R d'equacions implícites

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 3 \end{array}\right\},$$

trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela a R que passa pel punt $(3, -1, 2)$.

16. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $p = (-6, 15, -8)$ respecte a la recta afí d'equacions implícites

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 6 \\ 2x - 2y + 3z = -13 \end{array}\right\}.$$

17. Trobeu la projecció ortogonal i el simètric del punt p sobre el pla P en cada un dels plans següents:

(a) $p = (4, -1, 5)$ i $P : x - 2y + z = -1$ (b) $p = (10, 7, -4)$ i $P : 2x + 2y - z = 11$
(c) $p = (-5, -3, 9)$ i $P : x + 3y - 3z = -3$ (d) $p = (-4, 6, -8)$ i $P : x - y + 2z = -8$

18. Estudieu la posició relativa de les rectes i plans de P_3 següents:

(a) $(x, y, z) = (2, -9, -8) + \lambda(1, 3, 4)$ i $x - 1 = y + 2 = 13 - z$;

(b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x - 4y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ i $5x - 7y - 3z = 11$;

(c) $3x + 2y + 3z = 1$ i $6x + 4y + 6z = -5$.

19. Les equacions respectives de dues rectes de P_3 són

$$x - 3 = \frac{y + 8}{3} = \frac{z + 9}{4} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 7 \\ 4x + 2y - 9z = 12 \end{array}\right\}.$$

(a) Analitzeu la seva posició relativa i, en cas que es tallin, determineu la seva intersecció.

(b) Trobeu una equació vectorial del pla que conté la primera recta i és paral·lel a la segona.

(c) Determineu unes equacions implícites de la recta que passa pel punt $(-1, 4, 2)$ i talla totes dues rectes.

20. Donats els plans d'equacions

$$\begin{aligned} p_1 &: 2x - y + z &&= 2 \\ p_2 &: (m-1)x + my + z &&= 1 \\ p_3 &: mx - (m-1)y + z &&= 2(m-1)\,, \end{aligned}$$

estudieu la seva posició relativa en funció del paràmetre m.

21. Donats els plans d'equacions

$$\begin{aligned} p_1 &: x + 5y + kz &&= 3 \\ p_2 &: (k+1)x - 10y + 6z &&= 6 \\ p_3 &: 3x + 2y + 2z &&= k \end{aligned}$$

estudieu la seva posició relativa en funció del paràmetre k.

22. Es consideren el punt $(0, -1, 2)$ i la recta d'equació

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{-2}\,.$$

(a) Trobeu la distància del punt a la recta.

(b) Determineu el pla perpendicular a la recta anterior que passa pel punt d'abans.

(c) Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt respecte de la recta.

23. Es consideren el punt $(0, 1, 0)$ i el pla d'equació

$$x + y - 3z = -9\,.$$

(a) Calculeu la distància del punt al pla.

(b) Determineu la recta perpendicular a aquest pla que passa pel punt d'abans.

(c) Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt respecte del pla.

24. Determineu si les rectes i plans següents són perpendiculars i, en cas negatiu, trobeu l'angle que formen:

(a) $x - 2 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{0}$ i $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(-1, 0, 1)$;

(b) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ i $x - y + 2z + 3 = 0$;

(c) $x - y - z = 8$ i $x - 3y + 4z = 4$.

25. Calculeu la distància que hi ha entre les rectes i plans següents:

(a) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{0}$ i $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{0}$;

(b) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ x + 5y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ i $2x + y - 5z = 1$:

(c) $2x + 3y - 5z = 7$ i $3x + 2y + 3z = 1$.

26. Les equacions respectives de dues rectes de P_3 són

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-3} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{array}{r}2x-y+3=0\\ 2x-z-1=0\end{array}\right\}.$$

(a) Determineu la distància que hi ha entre elles.

(b) Trobeu l'equació contínua de la recta perpendicular comuna que talla totes dues rectes.

27. Trobeu l'ortocentre del triangle a l'espai que té els vèrtexs en els punts $(1,2,4)$, $(-2,-4,1)$ i $(-2,-4,-1)$. L'ortocentre d'un triangle és el punt on es tallen les seves altures (rectes perpendiculars a cada costat que passen pel vèrtex oposat).

28. Trobeu el circumcentre del triangle que té els vèrtexs en els punts $(3,-3,-2)$, $(2,4,1)$ i $(1,4,-1)$. El circumcentre d'un triangle és el punt on es tallen les seves mediatrius (rectes perpendiculars a cada costat que passen pel seu punt mitjà).

29. Analitzeu si el sistema següent és una referència i, en cas afirmatiu, calculeu les coordenades del punt $(2,1,-3)$:

$$\{(-1,2,1);\ (1,-2,-2),(1,-1,-2),(1,0,-1)\}.$$

30. Estudieu la posició relativa de la recta i el pla que en la referència

$$\mathcal{R}'=\{(2,3,-1);\ (1,0,-3),(0,1,2),(1,-2,-2)\}$$

tenen les equacions respectives següents i determineu la seva intersecció si n'hi ha:

$$(x',y',z')=(0,2,-1)+\lambda(2,1,3) \qquad \text{i} \qquad x'-y'-2z'=-3\,.$$

31. Donades les referències del pla $\mathcal{R}'=\{(1,2);(2,1),(-1,1)\}$ i $\mathcal{R}''=\{(3,0);(3,-1),(1,1)\}$, trobeu les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}'$. Quines són les coordenades del punt $(3,0)$ en la referència $\mathcal{R}'$?

32. La representació del punt p en la referència

$$\mathcal{R}'=\{(3,-3,-2);(-3,-2,-1),(2,-1,-2),(2,2,1)\}$$

és $p=(3,2,2)_{\mathcal{R}'}$. Quines són les seves coordenades en la referència

$$\mathcal{R}''=\{(-1,-1,2);(2,2,-1),(-1,-1,1),(1,-2,1)\}\ ?$$

33. Trobeu l'equació de la recta afí $3x+2y=1$ en la referència $\mathcal{R}'=\{(1,2);(3,-1),(1,1)\}$.

34. L'equació d'un pla afí P en la referència $\mathcal{R}'=\{(1,-1,-1);(1,-2,1),(1,-1,2),(1,-1,1)\}$ és

$$4x'+6y'+3z'=2$$

Trobeu la seva equació en la referència canònica.

35. Donada la referència $\mathcal{R}'=\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, la matriu de Gram de la base $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ és

$$G=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

Sabent que les equacions implícites de la recta R en la referència $\mathcal{R}'$ són

$$\left.\begin{aligned} 2x' + 3y' + 3z' &= -3 \\ x' + 2y' + z' &= -4 \end{aligned}\right\},$$

trobeu l'equació del pla perpendicular a R que passa pel punt $p = (4, -4, -4)_{\mathcal{R}'}$.

36. Trobeu la referència $\mathcal{R}'$, sabent que el seu origen és el punt $(-2, 3, -2)$ i que les coordenades dels punts $(4, -4, -3)$, $(3, -2, -3)$ i $(1, 1, -2)$ en aquesta referència són, respectivament, $(-8, -10, 19)_{\mathcal{R}'}$, $(-7, -10, 18)_{\mathcal{R}'}$ i $(-3, -4, 7)_{\mathcal{R}'}$.

37. Donat el paral·lelogram P de vèrtexs $(1, -2)$, $(5, -1)$, $(2, 5)$ i $(-2, 4)$, trobeu una referència $\mathcal{R}'$ tal que paral·lelogram s'hi representi de manera més senzilla. Calculeu també l'àrea del paral·lelogram.

38. Determineu el centre i el radi de les circumferències següents:

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 15 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 17 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$

39. Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $(1, 7)$, $(-6, 6)$ i $(-5, -1)$. Quin és el seu centre?

40. Calculeu l'equació de la circumferència que té per centre el punt $(5, 3)$ i és tangent a la recta d'equació $3x + 2y = 8$.

41. Trobeu els focus i els semieixos major i menor de l'el·lipse d'equació $2x^2 + y^2 = 16$.

42. L'equació d'una hipèrbola és

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Quina és la semidistància focal? I les equacions de les seves asímptotes?

43. Calculeu l'equació de les rectes tangents a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 10 = 0$ que passen pel punt $(7, -1)$. Indicació: les rectes tangents a la circumferència només la tallen en un punt.

44. Calculeu els punt d'intersecció de la paràbola $y = x^2$ i la recta $2x + y = 3$. Quins són el paràmetre i el focus de la paràbola?

45. Trobeu l'equació de la hipèrbola que passa pel punt $(3, 4)$ i té els focus en els punts $F = (\sqrt{3}, 0)$ i $F' = (-\sqrt{3}, 0)$.

46. Representeu gràficament la hipèrbola d'equació

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

i digueu quin són els seus vèrtexs i les equacions de les seves asímptotes.

47. Trobeu el centre, els semieixos i la semidistància focal de les hipèrboles següents.

(a) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 41 = 0$ (b) $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$
(c) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 52 = 0$ (d) $4x^2 - y^2 + 32x + 6y + 63 = 0$.

48. Trobeu l'equació de l'el·lipse
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$
en la referència $\mathcal{R}' = \left\{(0,0)\,;\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\right\}$.

49. L'equació d'una circumferència en la referència $\mathcal{R}' = \left\{(2,-3)\,;\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$ és
$$x'^2 + y'^2 = 4\,.$$
Quina és la seva equació en la referència canònica? Intenteu trobar la solució de dues maneres diferents.

50. Si fem girar la hipèrbola d'equació
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
al voltant de l'eix de les y, quina superfície obtenim?

51. Digueu el tipus de quàdrica que es correspon a cada una de les equacions següents (els coeficients a, b i c son tots no nuls).

(a) $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (c) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (f) $z - a^2y^2 = 0$

52. Donada la quàdrica d'equació $xy - xz + yz = 0$, trobeu la seva equació en la referència
$$\mathcal{R}' = \left\{(0,0,0)\,;\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}.$$
Quin tipus de quàdrica és?

53. L'equació d'una quàdrica en la referència
$$\mathcal{R}' = \left\{(1,-4,2); \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\}$$
és
$$z' = \frac{x'^2}{10\sqrt{2}} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}}.$$
Quina és la seva equació en la referència canònica?

54. Trobeu l'àrea del triangle determinat pel centre de la circumferència d'equació
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$
i els punts d'intersecció de la mateixa circumferència amb la recta $x - y + 1 = 0$. Indicació: no cal que trobeu els punts d'intersecció de la circumferència i la recta.

55. Calculeu el volum del con que té el vèrtex en el centre de l'esfera d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 18 = 0$$

i com a base, la intersecció de la mateixa esfera i el pla $2x - y + 2z = 1$.

56. Donada l'esfera d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 2z - 44 = 0\,,$$

trobeu l'equació dels dos plans tangents a l'esfera i paral·lels al pla $3x - 7y + 2z = 95$.

57. Trobeu els semieixos de la hipèrbola que s'obté com a intersecció del paraboloide hiperbòlic d'equació

$$z = \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{45}$$

amb el pla d'equació $z = 5$.

58. La intersecció del paraboloide hiperbòlic

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

i el pla d'equació $z = 3$ és una hipèrbola de semieix real $\sqrt{6}$ i semieix imaginari $2\sqrt{3}$. Trobeu els valors de a i b.

59. Trobeu l'equació de la superfície de revolució que s'obté en fer girar la recta d'equació $y = 2x + 1$, continguda en el pla $z = 0$, al voltant de l'eix de les y.

60. Trobeu l'equació de la superfície de revolució que s'obté en fer girar la hipèrbola d'equació

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1\,,$$

continguda en el pla $y = 0$, al voltant de l'eix de les z.

61. Trobeu l'equació de la superfície de revolució que s'obté en fer girar la paràbola d'equació

$$x = -2 + \frac{z^2}{4}\,,$$

continguda en el pla $y = 0$, al voltant de l'eix de les z.

Annex

62. Representeu amb el Blender les superfícies i regions següents:

(a) Els cilindres el·líptics d'equacions

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 0\,, \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 0\,.$$

(b) Els cons d'equacions

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - z^2 = 0\,, \qquad x^2 - \frac{y^2}{2} + z^2 = 0 \qquad \text{i} \qquad -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 0\,.$$

(c) La regió limitada pel con $z^2 = \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8}$ i els plans $z = 0$ i $x + 12z = 36$.

(d) L'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ i el cilindre d'equació $x^2 + y^2 = 10x$.

(e) La superfície obtinguda en fer girar la paràbola d'equació $x = 4 + y^2$ al voltant de l'eix de les x.

(f) El cilindre el·líptic d'equació $3(x-4)^2 + 2(z+2)^2 = 48$.

(g) L'esfera de centre $(4, -1, 3)$ i radi 6 i el pla $z = 6$.

(h) La intersecció del cilindre d'equació $x^2 + y^2 = 6x$ i el con $z^2 = x^2 + y^2$.

(i) L'hiperboloide de dues fulles d'equació

$$\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(z-4)^2}{18} = 1\,.$$

(j) La regió limitada pel paraboloide $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$ i els plans $z = 0$ i $z = 3$.

(k) La intersecció de l'hiperboloide d'una fulla d'equació

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{20} + \frac{z^2}{25} = 1$$

i el pla $x + 2y + z = 4$.

(l) El cilindre d'equació $(x-4)^2 + y^2 = 16$ i el con

$$z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

(m) El cilindre parabòlic d'equació $y = x^2 - 6x + 8$

(n) La regió limitada pel paraboloide $x = 4 - 2(y^2 + z^2)$ i els plans $x = 0$ i $x + y + z = 3$.

(o) La quàdrica d'equació $36x^2 + 25y^2 + 450z^2 - 216x - 50y + 1800z + 1249 = 0$.

(p) La quàdrica d'equació $24x^2 - 16y^2 - 3z^2 - 96x - 64y - 18z - 43 = 0$.

(q) La quàdrica d'equació $x^2 - 8z^2 + 4x + 16y + 64z - 60 = 0$.

(r) La quàdrica d'equació $8x^2 - 5y^2 - 80z^2 - 48x + 20y - 160z - 28 = 0$.

Capítol 5

Transformacions lineals i afins

1. Donades les transformacions lineals T_1 i T_2 de V_2 definides per

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

calculeu les imatges dels vectors $(2,3)$, $(-1,2)$ i $(4,-1)$.

2. Donada la transformació lineal T de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

calculeu les imatges dels vectors $(3,1,-1)$, $(1,-2,-1)$ i $(1,-4,1)$ i les antiimatges dels vectors $(1,1,-1)$ i $(-2,6,2)$.

3. La transformació lineal de V_2 ve definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

representeu gràficament en què es transforma el quadrat de vèrtexs $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,2)$ i $(-2,2)$.

4. Siguin G el gir d'angle 120° de V_2 i T l'escalat de coeficient 1 en la direcció de les x i coeficient 2 en la direcció de y.

(a) Trobeu la transformació lineal consistent en aplicar primer l'escalat i després el gir.

(b) Trobeu la transformació lineal consistent en aplicar primer el gir i després l'escalat.

En cada representeu en què es transforma el rectangle de vèrtexs $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ i $(-2,1)$.

5. Trobeu la transformació lineal de V_2 que compleix

$$\left.\begin{aligned} T(2,-3) &= (7,-16) \\ T(2,1) &= (11,0) \end{aligned}\right\}$$

6. Trobeu la transformació lineal de V_2 que consisteix en un escalat de coeficient 3 en la direcció $(1, 1)$ i de coeficient 2 en la direcció $(-1, 1)$. Representeu gràficament en què es transformen el rectangle de vèrtexs $(-4, -2)$, $(4, -2)$, $(4, 2)$ i $(-4, 2)$ i el rectangle de vèrtexs $(4, 2)$, $(2, 4)$, $(-4, -2)$ i $(-2, -4)$.

7. Trobeu la transformació lineal de V_3 que compleix

$$\left.\begin{aligned} T(1, -1, 0) &= (-1, 3, 1) \\ T(0, -1, 1) &= (1, -2, 2) \\ T(-1, 1, 1) &= (-2, 1, 2) \end{aligned}\right\}$$

8. Donades les transformacions lineals de V_2

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

trobeu les seves expressions en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (1, -1)\}$.

9. La transformació lineal T de V_3 ve definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

trobeu la seva expressió en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

10. La transformació lineal T de V_3 ve donada en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ per

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

trobeu la seva expressió en la base canònica.

11. Quina és la representació en la base canònica de la rotació de 60° al voltant de l'eix de les z?

12. Quina és la representació en la base canònica de la rotació de 270° al voltant del vector $(1, -2, 2)$? Quins són els seus angles d'Euler?

13. Quina és la representació en la base canònica de la rotació de $\alpha = 38.213°$ al voltant del vector $(1, -1, -1)$? Quins són els seus angles d'Euler? Indicació: Feu servir que $\cos\alpha = \frac{11}{14}$ i $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

14. Trobeu la representació en la base canònica de la transformació lineal T de V_3 que consisteix en aplicar successivament una rotació de 120° al voltant de l'eix de les y, una rotació de 270° al voltant de l'eix de les z i una rotació de 60° al voltant de l'eix de les y.

15. Dotats els quaternions $p = 2 - i + 2j - k$ i $q = 1 - i + 2j + 2k$, calculeu pq, qp, pq^*, q^*p i pqp^*.

16. Trobeu la representació en la base canònica de la rotació de 180° al voltant del vector $(1, -1, -1)$ fent servir la fórmula dels quaternions.

17. Sigui T la transformació lineal de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comproveu que és una rotació i trobeu els seus eix, angle de rotació i quaternió que la defineix.

18. Sigui T la transformació lineal de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comproveu que és una rotació i trobeu els seus eix i angle de rotació.

19. Donada la transformació afí T de P_2

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

representeu gràficament en què es transforma el quadrat de vèrtexs $(0,3)$, $(2,3)$, $(2,5)$ i $(0,5)$. Té algun punt fix aquesta transformació? Indicació: un punt fix d'una transformació afí és un punt que compleix $T(x,y) = (x,y)$.

20. Trobeu la representació en la referència canònica de la rotació de 270° al voltant del punt $(3,3)$ i feu el gràfic del trapezi de vèrtexs $(-3,-1)$, $(3,-1)$, $(4,1)$ i $(-4,1)$ i el seu transformat.

21. Siguin G_1 el gir de 45° al voltant del punt $(2,3)$ i G_2 el gir de 225° al voltant del punt $(3,-1)$. Trobeu la representació en la referència canònica de la transformació afí que consisteix en aplicar primer el gir G_2 i després el gir G_1.

22. Sigui T la transformació afí de P_3 que consisteix en la rotació de 60° al voltant de la recta d'equació contínua

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1},$$

trobeu la seva representació en la base canònica.

23. Quina és la representació en la referència canònica de la transformació afí de P_3 que consisteix en la rotació de 180° al voltant de la recta d'equació contínua

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

seguida d'una translació de $(3,-3,-3)$?

24. La transformació afí T de P_3 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comproveu que és una rotació i trobeu l'angle i l'eix de rotació.

25. La transformació afí T de P_3 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comproveu que és un moviment helicoïdal i descriviu-lo.

26. Siguin R la recta d'equació contínua

$$x-2=\frac{y-2}{-1}=z+3\,.$$

(a) Quina és la representació en la referència canònica del moviment helicoïdal que consisteix en una rotació d'angle 120° al voltant de la recta R seguida d'una translació de $(3,-3,3)$.

(b) Trobeu els angles d'Euler de la rotació d'angle 120° al voltant del vector $(1,-1,1)$.

27. Sigui R la recta d'equació contínua

$$\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{-1}=z-1\,.$$

Trobeu la representació en la referència canònica del moviment helicoïdal que consisteix en una rotació d'angle 240° al voltant de la recta R seguida d'una translació determinada pel vector $(0,3\sqrt{6},-3\sqrt{6})$.

28. Trobeu l'expressió de la transformació afí de P_2 donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en la referència $\mathcal{R}'=\{(1,-2);(1,1),(-1,1)\}$. Calculeu $T(1,-2)$ de dues maneres diferents i comproveu que dona el mateix.

29. Trobeu la transformació afí de P_2 que transforma el triangle de vèrtexs $(-3,-5)$, $(-7,-2)$ i $(-5,4)$ en el triangle de vèrtexs $(5,-1)$, $(5,4)$ i $(-1,6)$. Determineu els punts fixos d'aquesta transformació afí i representeu-ho tot gràficament.

Annex

30. Sigui R la rotació de V_3 amb angle d'Euler $\psi=120°$, $\theta=60°$ i $\psi=120°$, podríeu trobar uns altres angles ψ, θ i ϕ entre 0° o 360° que donin lloc a la mateixa rotació?

31. Anomenarem rotació amb angles d'Euler α, β i γ a la combinació de tres rotacions elementals d'Euler al voltant dels eixos següents:

1. Rotació d'angle α al voltant de l'eix de les z.
2. Rotació d'angle β al voltant de l'eix de les y.
3. Rotació d'angle γ al voltant de l'eix les x.

Si la representació d'una rotació en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2 \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

trobeu els angles α, β i γ.

32. Busqueu informació i expliqueu en que consisteix el *gimbal lock* i la seva relació amb els angles d'Euler.

Capítol 6

Diagonalització

1. Per a cada una de les transformacions lineals següents trobeu una base de vectors propis i la seva expressió en aquesta base

(a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Per a cada una de les transformacions lineals següents trobeu una base de vectors propis i la seva expressió en aquesta base

(a) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -9 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. Per a cada una de les matrius següents

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

trobeu una matriu invertible C i una matriu diagonal D tals que $D = C^{-1}AC$.

4. Per a cada una de les matrius següents

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -8 & 7 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 4 & -7 & -2 \\ -4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

trobeu una matriu invertible C i una matriu diagonal D tals que $D = C^{-1}AC$.

5. Donat la transformació lineal T de V_3 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

digueu quins del vectors següents són vectors propis de T

(a) $\vec{u}_1 = (2, 1, -3)$ (b) $\vec{u}_2 = (3, 4, 7)$ (c) $\vec{u}_3 = (-2, 1, 2)$
(d) $\vec{u}_4 = (2, 3, 5)$ (e) $\vec{u}_5 = (1, 1, 3)$ (f) $\vec{u}_6 = (1, 1, 2)$

6. Escriviu una base de vectors propis i la matriu diagonal corresponent de la transformació lineal de l'exercici anterior.

7. La transformació lineal T de V_2 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base de vectors propis de T i la seva expressió en aquesta base. Representeu gràficament en què es transforma el paral·lelogram de vèrtexs $(-1, -4)$, $(5, 2)$, $(1, 4)$ i $(-5, -2)$. (Aneu molt en compte amb la fracció factor comú.)

8. Els vectors $(2, 1)$ i $(-1, 1)$ són vectors propis de la transformació lineal T de V_2 amb valors propis 3 i 6, respectivament. Trobeu la matriu de T en la base canònica.

9. Comproveu que les matrius següents no són diagonalitzables sobre els reals i digueu perquè no ho són.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. Esbrineu quines de les matrius següents són diagonalitzables sobre els reals i, per a les que ho siguin, trobeu una base de vectors propis i la matriu diagonal corresponent.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

11. Una transformació lineal de V_2 compleix que

$$\left.\begin{array}{l} T(1,2) = (-4, 0) \\ T(1,3) = (-10, -2) \end{array}\right\}.$$

Comproveu que és diagonalitzable i trobeu una base de vectors propis de T i la matriu diagonal corresponent.

12. Analitzeu si és diagonalitzable la transformació lineal T de V_3 següent i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0) = (1, -3, 0) \\ T(1,1,0) = (-2, -2, 0) \\ T(1,1,1) = (-2, -2, 4) \end{array}\right\}.$$

13. L'expressió de la transformació lineal T de V_2 en la base $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(-2,1)\}$ és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

trobeu una base $\mathcal{B}''$ de vectors propis de T i la seva expressió en aquesta base.

14. La transformació lineal T de V_2 diagonalitza en la base $\mathcal{B}' = \{(1,1),(3,4)\}$ i la seva matriu en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Determineu els coeficients a i b i la matriu diagonal.

15. La transformació lineal T de V_2 diagonalitza en la base $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(3,-4)\}$ i compleix que

$$T(3,-1) = (15,-11).$$

Trobeu la seva matriu en la base canònica i el seu polinomi característic.

16. La transformació lineal T de V_2 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base ortonormal de vectors propis de T i la seva expressió en aquesta base.

17. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu ortogonal C i una matriu diagonal D tals que $D = C^t AC$.

18. La matriu de la transformació lineal T de V_3 en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu una base ortonormal de vectors propis de T i la seva expressió en aquesta base.

19. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu ortogonal C i una matriu diagonal D tals que $D = C^t AC$.

20. La transformació lineal T de V_3 ve donada per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

trobeu una base ortonormal de vectors propis de T i la seva matriu en aquesta base.

21. Donada la matriu amb tres files i una columna

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

comproveu que $A = I - BB^t$ és simètrica i trobeu una matriu ortogonal C i una matriu diagonal D tals que $D = C^tAC$.

22. És possible trobar una matriu simètrica que tingui vectors propis $\vec{u}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,0)$ i $\vec{u}_3 = (0,1,1)$ amb valors propis $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -1$, respectivament?

23. Donada la transformació lineal de V_2 definida per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

representeu gràficament en què es transforma el cercle de centre $(0,0)$ i radi 1?

24. Una transformació lineal simètrica de V_3 compleix que

$$\left.\begin{aligned} T(1,1,0) &= (2,-1,-3) \\ T(1,-1,1) &= (-4,4,-4) \end{aligned}\right\}$$

i, a més, el vector $(2,1,-1)$ és un vector propi de T. Trobeu la matriu de T en la base canònica.

25. Una transformació lineal simètrica T de V_3 compleix que $T(\vec{u}) = 2\vec{u}$ per a tot vector $\vec{u}$ del pla d'equació $x - y + z = 0$ i té determinant 12. Trobeu la seva matriu en la base canònica, una base ortonormal de vectors propis i la matriu diagonal corresponent.

Annex

26. Una transformació lineal T de V_3 té polinomi característic $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9$ i els vectors $(1,-2,1)$, $(3,-1,1)$, $(2,-2,1)$ i $(6,-7,4)$ són vectors propis de T. Trobeu la representació de T en la base canònica.

Capítol 7

Còniques i quàdriques

1. Els quatre vèrtexs d'una el·lipse estan situats en els punts $(10,-6)$, $(4,2)$, $(-6,2)$ i $(0,-6)$. Calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

2. Una hipèrbola té els vèrtexs en els punts $(0,2)$ i $(-2,0)$ i semidistància focal $c=\sqrt{10}$. Calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació i les equacions de les asímptotes en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

3. La recta directriu d'una paràbola té equació $x+y+10=0$ i el seu focus és el punt $(-2,0)$. Calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

4. Una hipèrbola té els focus en els punts $(8,-2)$ i $(-4,2)$ i un vèrtex en el punt $(-1,1)$. Calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

5. Una el·lipse té dos vèrtexs en els punts $(-1,4)$ i $(5,2)$ i els seus focus sobre la recta d'equació $x+y=3$. Calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

6. Els eixos principal i secundari d'una paràbola són, respectivament, les rectes d'equacions $x-2y+4=0$ i $2x+y=7$. Sabent que la paràbola passa pel punt $(0,3)$, calculeu la seva referència principal, la seva equació reduïda i la seva equació en la referència canònica. Representeu-la gràficament.

7. Per a cada una de les còniques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda i representeu-les gràficament.
   (a) $4x^2-12xy+9y^2-140x-128y-296=0$.
   (b) $19x^2+6xy+11y^2+26x-38y-349=0$.

8. Per a cada una de les còniques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda i representeu-les gràficament.

(a) $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 36x - 8y + 162 = 0$.

(b) $9x^2 - 6xy + y^2 - 90x - 170y - 275 = 0$.

9. Per a cada una de les còniques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda i representeu-les gràficament.

(a) $7x^2 - 8xy + 13y^2 + 26x + 28y - 83 = 0$.

(b) $3x^2 - 48x + 23y^2 - 54x + 94y + 191 = 0$.

10. Donada la cònica d'equació

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 84x + 32y - 236 = 0\,,$$

comproveu que és una paràbola i trobeu el seu focus i l'equació de la recta directriu.

11. Donada la cònica d'equació

$$34x^2 + 32xy + 34y^2 + 104x - 4y - 794 = 0\,,$$

comproveu que és una el·lipse i trobeu els seus focus i els seus vèrtexs.

12. Donada la cònica d'equació

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 - 14x + 94y + 125 = 0\,.$$

comproveu que és una hipèrbola i trobeu els vèrtexs i les equacions de les seves asímptotes.

13. La referència principal d'un hiperboloide de dues fulles és

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,2,-3)\,;\, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\right\}$$

i la seva equació reduïda

$$\frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2} = 1\,.$$

Calculeu la seva equació en la referència canònica.

14. L'equació d'un cilindre el·líptic en la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{(2,-3,-1)\,;\, \tfrac{1}{3}(2,1,2), \tfrac{1}{3}(-2,2,1), \tfrac{1}{3}(-1,-2,2)\right\}$$

és

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^3}{3} = 1\,,$$

Calculeu la seva equació en la referència canònica.

15. L'equació d'un paraboloide hiperbòlic en la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{(3,1,-2)\,;\, \tfrac{1}{7}(3,-2,6), \tfrac{1}{7}(-2,6,3), \tfrac{1}{7}(-6,-3,2)\right\}$$

és

$$z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4}\,,$$

Calculeu la seva equació en la referència canònica.

16. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $7x^2 + 7y^2 + 12z^2 + 2xy + 12xz - 12yz + 38x - 22y + 60z - 65 = 0.$

(b) $-3y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz - 8yz + 24x + 30y - 12z + 9 = 0.$

17. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2yz - 20x + 2y + 18z - 9 = 0.$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 2x + 2y - 10z + 9 = 0.$

18. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 6yz + 12x + 16y + 4z - 7 = 0.$

(b) $x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 20xz + 8yz - 32x + 56y - 76z - 50 = 0.$

19. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 8x - 4y - 4z + 4 = 0.$

(b) $2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 4xy + 6xz - 6yz - 2x + 22y - 8z + 8 = 0.$

20. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $5x^2 - 4y^2 + 5z^2 + 16xy + 2xz - 16yz - 36x - 48y + 60z - 144 = 0.$

(b) $-z^2 - 4xy - 2xz - 2yz - 2x + 6y + 2z + 9 = 0.$

21. Per a cada una de les quàdriques següents, determineu el seu tipus, la seva referència principal i la seva equació reduïda.

(a) $13x^2 + 10y^2 + 10z^2 - 6xy + 6xz - 20yz - 34x - 48y + 48z + 18 = 0.$

(b) $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 14xy + 8xz - 8yz - 18x - 10y - 24z + 5 = 0.$

Annex

22. Donada la quàdrica d'equació

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x + 4y + 142z + 1 = 0\,,$$

comproveu que la seva intersecció amb el pla $2x - y + z = 2$ és una paràbola i calculeu els seus vèrtex, focus i paràmetre.

23. Donada la quàdrica d'equació

$$13x^2 - 2y^2 + 13z^2 + 20xy + 10xz - 20yz - 18x + 72y + 54z - 9 = 0\,,$$

comproveu que la seva intersecció amb el pla $x + y - 2z = 7$ és una hipèrbola i calculeu el seu centre i els seus semieixos.

24. Donada la quàdrica d'equació

$$5x^2 + y^2 + z^2 + 8xy - 8xz + 18x + 16y - 2z + 2 = 0\,,$$

comproveu que la seva intersecció amb el pla $y - z = 5$ és una el·lipse i calculeu el seu centre i els seus semieixos.

25. Donada la quàdrica d'equació

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x + 4y + 142z + 1 = 0\,,$$

sabem que la seva intersecció amb el pla P d'equació $2x - y + z = 2$ és una paràbola. Si translladem aquesta paràbola perpendicularment al pla P, quina serà l'equació en la referència canònica del cilindre parabòlic obtingut?

26. Donada la quàdrica d'equació

$$13x^2 - 2y^2 + 13z^2 + 20xy + 10xz - 20yz - 18x + 72y + 54z - 9 = 0\,,$$

sabem que la seva intersecció amb el pla P d'equació $x + y - 2z = 7$ és una hipèrbola. Si translladem aquesta hipèrbola perpendicularment al pla P, quina serà l'equació en la referència canònica del cilindre hiperbòlic obtingut?

27. Donada la quàdrica d'equació

$$5x^2 + y^2 + z^2 + 8xy - 8xz + 18x + 16y - 2z + 2 = 0\,,$$

sabem que la seva intersecció amb el pla P d'equació $y - z = 5$ és una el·lipse. Si translladem aquesta el·lipse perpendicularment al pla P, quina serà l'equació en la referència canònica del cilindre el·líptic obtingut?

28. Representeu amb el Blender les quàdriques que tenen les referències principals i equacions reduïdes següents:

(a) $\mathcal{R}' = \left\{(3,4,-3); \frac{1}{\sqrt{19}}(1,-3,-3), \frac{1}{\sqrt{38}}(6,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$ i $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{8} = -1.$

(b) $\mathcal{R}' = \left\{(3,1,-2); \frac{1}{3}(1,-2,-2), \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$ i $z' = \frac{x'^2}{8\sqrt{2}} - \frac{y'^2}{10\sqrt{2}}.$

(c) $\mathcal{R}' = \left\{(2,2,-3); \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{42}}(1,5,-4)\right\}$ i $\frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{4} = 1.$

(d) $\mathcal{R}' = \left\{(1,-1,-2); \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2), \frac{1}{5\sqrt{3}}(5,-7,1), \frac{1}{5\sqrt{2}}(5,3,-4)\right\}$ i $\frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{2} = 1.$

(e) $\mathcal{R}' = \left\{(4,-4,-2); \frac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{230}}(15,-2,1), \frac{1}{\sqrt{46}}(-1,-6,3)\right\}$ i $z' = \frac{x'^2}{4\sqrt{46}} - \frac{y'^2}{\sqrt{46}}.$

(f) $\mathcal{R}' = \left\{(2,-1,4); \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right\}$ i $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{10} - \frac{z'^2}{25} = 1.$

Capítol 8

Solucions dels exercicis

8.1 Matrius i sistemes d'equacions lineals

1. $\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 8 & 4 & 9 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 5 \\ -4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $AB = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $AB = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. (a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Només estan en forma triangular les matrius (b), (d) i (e).

7. (a) 3. (b) 3. (c) 2. (d) 3. (e) 2. (f) 2.

8. Després d'aplicar la transformació elemental obtenim la matriu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 10 & 7 \\ -4 & 9 & 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

La comprovació és immediata.

9. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

10. (a) AB té 3 files i 3 columnes. BA té 4 files i 4 columnes.
(b) La segona columna de AB és igual a

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. $F_4 = -2F_1 + F_2 + 5F_3$.

12. $2F_1 - 3F_2 + 7F_3 + F_4 = 0$.

13. (a) El rang és 3. (b) El rang és 2. (c) El rang és 2.

14. (a) El rang és 2. (b) El rang és 2. (c) El rang és 2.

15. $(AB)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ i $A^tB^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -56 & 44 \\ -40 & 32 \end{pmatrix}$ i $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -32 & 18 \\ -30 & 8 \end{pmatrix}$.

17. (a) Simètrica i ortogonal.
(b) No simètrica i no ortogonal.
(c) No simètrica i ortogonal.

18. (a) $x = 3 + 3y$. (b) $x = \frac{9}{7}$ i $y = -\frac{10}{7}$. (c) $x = -6$ i $y = -3$. (d) $x = -\frac{8}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$. (e) Incompatible. (f) $x = 1$ i $y = -\frac{3}{2}$.

19. (a) $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 - z \end{array}\right\}$ (b) $x = 3$ $y = -\frac{2}{5}$ i $z = -\frac{6}{5}$. (c) $x = 1$, $y = 2$ i $z = 0$.

20. (a) $x = -\frac{21}{5}$, $y = 2$ i $z = \frac{12}{5}$.
(b) Una possible solució és $x = -z + 3$, $y = -z + 1$ i $t = 2$.
(c) Incompatible.

21. (a) $\left.\begin{array}{l} x = -y + 4t - 6 \\ z = \frac{3-2t}{2} \end{array}\right\}$. (b) $\left.\begin{array}{l} x = 4z - 2t + 6 \\ y = 7z - 2t + 8 \end{array}\right\}$.
(c) $\left.\begin{array}{l} x = -3z - 2 \\ y = \frac{12z + 3t + 9}{2} \end{array}\right\}$. (d) $\left.\begin{array}{l} x = z - 2t - 2 \\ y = z + 7t + 5 \end{array}\right\}$.

22. (a) $x = 1$ i $y = 1$. (b) $x = 15$ i $y = -9$. (c) $x = \frac{4}{7}$ i $y = -\frac{2}{7}$.

23. (a) Incompatible.
(b) Incompatible.
(c) Compatible determinat amb solució $x = 8$, $y = -6$.

24. Les inverses són:

(a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (e) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ (f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

25. La matriu C no té inversa. Les inverses de les matrius A i B són

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. La inversa de BA és

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

27. Els productes són $A^2 = AA$, $A^4 = A^2A^2$, $A^8 = A^4A^4$, $A^{12} = A^8A^4$ i $A = 14 = A^{12}A^2$. Aleshores,

$$A^{14} = \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 128 \end{pmatrix}.$$

28. $c = 0$ i tenim dues possibles opcions, (a) $a = 1$ i $b = -1$ i (b) $a = -1$ i $b = 1$.

8.2 Determinants

1. (a) 6. (b) −70. (c) −17. (d) 21. (e) 1. (f) −55. (g) 12. (h) 11. (i) −18. (j) −32.

2. (a) 6. (b) −8. (c) −13. (d) 11. (e) −30. (f) 5. (g) 28. (h) −21.

3. (a) 13. (b) 14.

4. (a) −9. (b) 7.

5. (a) 12. (b) 0.

6. (a) $\det(A_1) = 2$. (b) $\det(A_2) = 2$. (c) $\det(A_3) = -2$. (d) $\det(A_4) = 2$. (e) $\det(A_5) = -24$.

7. En la primera n'hi ha 1960, i en la segona, 6720.

8. (a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 2. (e) 3. (f) 2. (g) 3. (h) 2.

9. 35.

10. S'han de calcular 35 menors d'ordre 6 de la matriu dels coeficients de les incògnites. Hem calculat 7 menors addicionals. El sistema té 7 graus de llibertat.

11. Les inverses són:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(e)}\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(g)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(h)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Les inverses són:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -5 & 15 & -7 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -2 & -13 & -10 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 23 & 19 & 10 \\ 14 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -24 & -14 & -26 \\ -4 & -2 & -4 \\ -17 & -10 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{(e)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -14 & 1 & 10 \\ 5 & -1 & -4 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 11 & -26 & 1 \\ 10 & -24 & 1 \end{pmatrix}$$

13. (a) $x = 0$ i $y = 1$. (b) $x = \frac{7}{3}$ i $y = -\frac{5}{3}$. (c) $x = 3$ i $y = \frac{5}{2}$. (d) $x = 8$ i $y = -3$. (e) $x = 6$ i $y = 3$. (f) $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$.

14. (a) $x = -3$ i $y = -2$. (b) $x = \frac{3}{2}$ i $y = -\frac{7}{2}$ (c) $x = -\frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$. (d) $x = 0$ i $y = -3$ (e) $x = \frac{4}{5}$ i $y = -\frac{6}{5}$. (f) $x = -2$ i $y = 1$.

15. (a) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ i $z = -\frac{1}{2}$. (b) $x = 4$, $y = 3$ i $z = -6$. (c) $x = 3$, $y = \frac{4}{5}$ i $z = \frac{4}{5}$ (d) $x = -\frac{16}{3}$, $y = 1$ i $z = \frac{4}{3}$.

16. Unes possibles solucions són (depèn del menor no nul que s'hagi escollit)

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x &= z + 2t - 1 \\ y &= -z + t \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{-z + 8t - 2}{2} \\ y &= \frac{3z - 2t + 2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(c)}\ \left.\begin{aligned} x &= z + t \\ y &= \frac{-4z + t - 2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}\ \left.\begin{aligned} x &= z - 2t + 2 \\ y &= -t - 1 \end{aligned}\right\}$$

17. Les solucions són

(a) Incompatible (b) $\left.\begin{aligned} x &= 2y-5 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\}$

(c) Incompatible (d) $\left.\begin{aligned} x &= 2y-2 \\ z &= -1 \end{aligned}\right\}$

18. Unes possibles solucions són (depèn del menor no nul que s'hagi escollit)

(a) $\left.\begin{aligned} x &= -t+1 \\ y &= \frac{2z-t+2}{2} \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x &= -t \\ y &= t-2 \\ z &= -t+1 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &= -\frac{z+10}{10} \\ y &= -\frac{-7z+10t}{10} \end{aligned}\right\}$ (d) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{-4t+2}{3} \\ y &= 1 \\ z &= \frac{t+4}{3} \end{aligned}\right\}$

19. (a) Si $m \neq 3$, el sistema és compatible determinat amb solució

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{m-3} \\ y &= \frac{m-9}{m-3} \end{aligned}\right\}.$$

Si $m = 3$, el sistema és incompatible.
(b) Si $m \neq \pm 1$, el sistema és compatible determinat amb solució

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{m+1} \\ y &= \frac{m+2}{m+1} \end{aligned}\right\}.$$

Si $m = 1$, és compatible indeterminat amb solució $y = 2 - x$. Si $m = -1$, és incompatible.
(c) Si $m \notin \{-2, 1, 2\}$, el sistema és incompatible. Per a $m = -2$, és compatible determinat amb solució $x = -1$ i $y = 1$. Per a $m = 1$, és compatible determinat amb solució $x = -1$ i $y = 4$. Per a $m = 2$, és compatible determinat amb solució $x = 1$ i $y = 1$.
(d) El sistema sempre és compatible indeterminat amb solució

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 - (m^2 - 2m)x \\ z &= -5 + (2m^2 - 6m)x \end{aligned}\right\}.$$

20. Si $\alpha \neq -3$ i 0, el sistema és compatible determinat amb solució

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\alpha}{\alpha+3} \\ y &= \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+3} \\ z &= \frac{3}{\alpha+3} \end{aligned}\right\}.$$

Si $\alpha = 0$, és compatible indeterminat amb solució $x = 1 - y - z$. Si $\alpha = -3$, és incompatible.

21. (a) $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 1$. (b) $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$. (c) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$. (d) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 3$.

8.3 Vectors al pla i a l'espai

1. (a) $(3, 7, -5)$. (b) $(-5, 2, -2)$. (c) $(5, 5, 25)$.

2. (a) $16\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$. (b) $65\vec{\imath}-53\vec{\jmath}-16\vec{k}$. (c) $30\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.

3. (a) $(7,2)=3(1,2)-4(-1,1)$. (b) Sí que ho és. Per exemple $(1,3,8)=2(1,2,3)-(1,1,-2)$. (c) Una possible solució, que no l'única, és $\vec{u}=2(2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k})-3(\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k})$. (d) No.

4. $7(3,3,3)+3(-2,-2,3)-15(1,1,2)=(0,0,0)$.

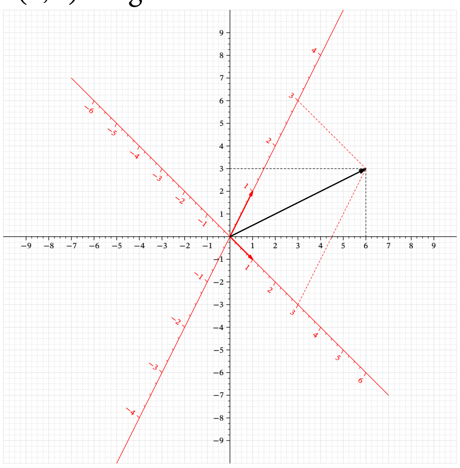
5. $\vec{x}=-\frac{1}{3}(-4\vec{u}+6\vec{v})$.

6. (a) Linealment independents. (b) Linealment independents. (c) Linealment dependents. (d) Linealment dependents.

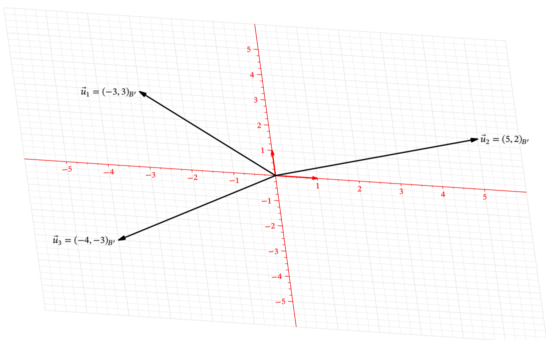
7. (a) Linealment independents. (b) Linealment independents. (d) Linealment dependents. (d) Linealment dependents.

8. (a) El vector $\vec{u}$ té components $(-4,5)$ en la base $\mathcal{B}'$, és a dir, $(9,7)=-4(-1,2)+5(1,3)=(-4,5)_{\mathcal{B}'}$.
(b) El vector $\vec{u}$ té components $(3,-1,2)$ en la base $\mathcal{B}'$, és a dir, $(12,3,15)=3(4,2,3-(2,5,2)+2(1,1,4)=(3,-1,2)_{\mathcal{B}'}$.
(c) El vector $\vec{u}$ té components $(4,-2,-3)$ en la base $\mathcal{B}'$, és a dir, $\vec{u}=4(2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})-2(\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k})-3(\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k})=(4,-2,-3)_{\mathcal{B}'}$.

9. Les components són $(3,3)_{\mathcal{B}'}=(6,3)$ i el gràfic



10. El gràfic és



11. Sí és base i les components són $(8,-14,9)$.

12. (a) Si. (b) Si. (c) No. (d) No. (e) Si. (f) No. (g) Si. (h) Si. (i) Si. (j) No.

13. (a) No. (b) Si. (c) Si. (d) No. (e) No.

14. (a) $xx-2y=0$. (b) $x+4y=0$. (c) $5x-y=0$. (d) $7x-3y=0$. (e) $2x+3y=0$.

15. (a) $\left.\begin{array}{r}x+3y=0\\4y+z=0\end{array}\right\}$. (b) $\left.\begin{array}{r}x-2y=0\\y-z=0\end{array}\right\}$. (c) $\left.\begin{array}{r}3x-z=0\\y=0\end{array}\right\}$. (d) $\left.\begin{array}{r}x+2y=0\\2y-z=0\end{array}\right\}$. (e) $\left.\begin{array}{r}x=0\\y=0\end{array}\right\}$.

16. (a) $x-z=0$. (b) $5x-2y+z=0$. (c) $-3x+y-z=0$. (d) $-y+z=0$. (e) $5x+2y-z=0$. (f) $y-z=0$. (g) $3x+y-z=0$. (h) $x+y+z=0$. (i) $x+z=0$.

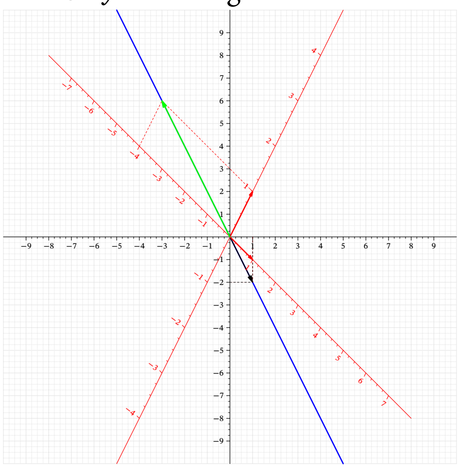
17. (a) $(0,-1,1)$. (b) $(3,2,1)$. (c) $(0,1,1)$. (d) $(2,-1,1)$. (e) $(-7,1,1)$. (f) $(0,1,1)$. (g) $(-6,2,1)$. (h) $(8,-3,1)$. (i) $(-5,-3,1)$.

18. Les matrius són

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \qquad & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{(b)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{(c)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{(d)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{(e)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{(f)} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

19. (a) $\vec{u} = (-6,10,-3)_{\mathcal{B}'}$. (b) $\vec{u} = (-7,-2,-5)_{\mathcal{B}'}$. (c) $\vec{u} = (-5,2,6)_{\mathcal{B}'}$. (d) $\vec{u} = ([-1,-1,0)_{\mathcal{B}'}$.

20. La seva equació en la base $\mathcal{B}'$ és $x' + 4y' = 0$ i el gràfic



21. (a) $3x - 4y = 0$. (b) $7x + 2y = 0$. (c) $x + 2y = 0$. (d) $6x + y = 0$.

22. (a) $5x' + 2y' + 3z' = 0$. (b) $x + z = 0$.

23. Les expressions del canvi de

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \text{(b)} & \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
\text{(c)} & \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \text{(d)} & \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
\end{array}
$$

24. (a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (b) $y'' + z'' = 0$.

25. $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 8$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4 = 11$, $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = 14$, $||\vec{u}_4|| = \sqrt{21}$ i $||\vec{u}_2 + \vec{u}_4|| = 7$.

26. Formen un angle de 60°.

27. Per a $t = 4$ i $t = -2$.

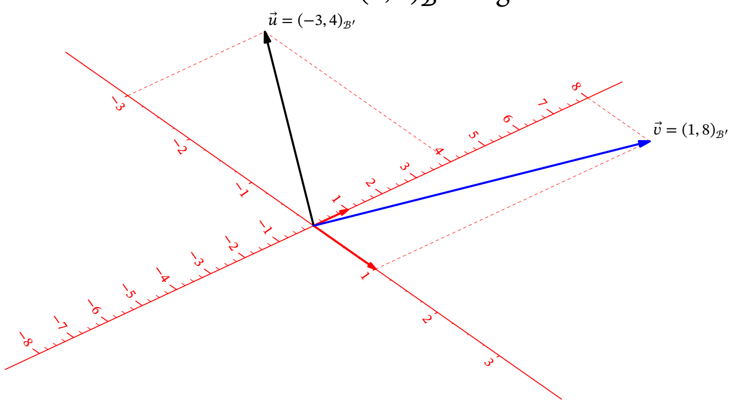
28. La matriu G és
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
i $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = -18$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4 = 11$, $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = -27$, $||\vec{u}_4|| = \sqrt{14}$ i $||\vec{u}_2 + \vec{u}_4|| = \sqrt{52}$

29. (a) $(2, 3, 1)$. (b) $(3, 1, 1)$. (c) $(2, 1, 1)$. (d) $(-1, -1, 1)$. (e) $(-3, 0, 1)$. (f) $(3, 1, -1)$.

30. (a) $(4, 3, -1)$. (b) $(1, -3, -3)$. (c) $(4, 2, 1)$. (d) $(1, 1, -1)$. (e) $(3, -1, 2)$. (f) $(1, 3, -4)$. (g) $(3, 2, -3)$. (h) $(2, -2, -1)$.

31. (a) $\{(1, -2, 4), (1, -3, 1)\}$. (b) $\{(1, -3, 3), (1, -2, 2)\}$. (c) $\{(1, -4, 4), (1, -3, 2)\}$. (d) $\{(1, -4, 2), (1, -3, -1)\}$. (e) $\{(1, 4, -1), (1, 3, -2)\}$. (f) $\{(1, -3, -2), (1, -4, -1)\}$.

32. (a) $\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2 = 3$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 9$, $\vec{e}_2 \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 3$, $||\vec{u}_2|| = \sqrt{43}$ i $||\vec{e}_1 + \vec{e}_2|| = \sqrt{7}$.
(b) $||\vec{u}|| = \sqrt{28} = 2\sqrt{8}$.
(c) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ és el vector $\vec{v} = (1, 8)_{\mathcal{B}'}$. El gràfic és



33. (a) $\vec{u}' = \frac{1}{5}(1, 2)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{5}(27, -11)$. (b) $\vec{u}' = (-4, 4)$ i $\vec{u}^* = (-3, 5)$. (c) $\vec{u}' = \frac{1}{5}(-11, 22)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{5}(3, 29)$. (d) $\vec{u}' = \frac{1}{13}(-55, -11)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{13}(-45, -61)$. (e) $\vec{u}' = (-5, 0)$ i $\vec{u}^* = (-5, -3)$.

34. (a) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 2)\}$. (b) $\{(1, 0, 2), (6, -5, -3)\}$. (c) $\{(1, 1, 0), (3, -3, 4)\}$. (d) $\{(3, 1, 0), (1, -3, 5)\}$. Com que la solució no és única, només cal que comproveu que, en cada cas, els dos vectors són perpendiculars i compleixen l'equació corresponent.

35. (a) $\vec{u}' = (3, -3, 3)$ i $\vec{u}^* = (3, -5, 2)$. (b) $\vec{u}' = \frac{1}{11}(6, -24, 42)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{11}(-45, -37, 29)$. (c) $\vec{u}' = (4, -1, 4)$ i $\vec{u}^* = (5, -1, 3)$.

36. (a) $\vec{u}' = \frac{1}{3}(8, -4, 4)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{3}(4, -17, -1)$. (b) $\vec{u}' = \frac{1}{14}(27, -18, 9)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{7}(-1, -39, -12)$. (c) $\vec{u}' = \frac{1}{3}(-2, 2, 2)$ i $\vec{u}^* = \frac{1}{3}(-16, -5, -5)$.

37. El vector $(1, -3, 1)$ perpendicular al pla i els vectors $\{(3, 1, 0), (-1, 3, 10)\}$ formen una base ortogonal del pla.

38. $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (3, 5, 4)$, $(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) \times \vec{u}_3 = (14, 10, 2)$, $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \times \vec{u}_3 = (6, -10, 8)$ i $\vec{u}_1 \times (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) = (10, -10, 0)$.

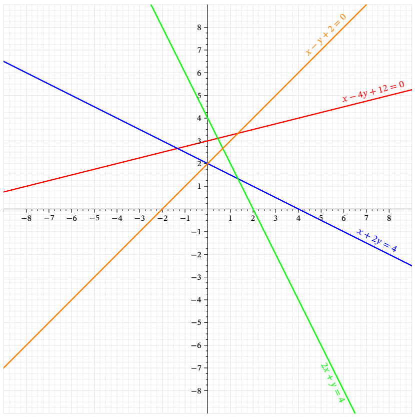
39. La longitud és de $\sqrt{229}$ cm.

40. Les longituds són de 7 i $\sqrt{129}$ m, respectivament.

41. (a) Una possible base ortogonal del pla és $\{(1, -2, 0), (-6, -3, 5)\}$. (b) Una possible base ortonormal del pla és
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-6, -3, 5) \right\}.$$
(c) Un generador de la recta perpendicular al pla és $(2, 1, 3)$. (d) $\vec{u}' = \frac{1}{7}(11, 23, -15)$. (e) $\vec{u}^* = \frac{1}{7}(15, 25, -9)$.

8.4 Geometria al pla i a l'espai

1. La representació de les rectes és



2. (a) $5x - 3y = 13$. (b) $4x + 5y + 4 = 0$. (c) $2x + 7y + 13 = 0$. (d) $2x - y = 3$. (e) $x + y = 2$. (f) $4x + 3y + 16 = 0$. (g) $x + 1 = 0$. h() $x - 9y = 5$.

3. Les equacions són:

Equació vectorial	$(x, y, z) = (-3, 2, 1) + t(3, 1, 1)$
Equacions paramètriques	$\left.\begin{array}{r} x = -3 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{array}\right\}$
Equació contínua	$\dfrac{x+3}{3} = y - 2 = z - 1$
Equacions implícites	$\left.\begin{array}{r} x - 3z = -6 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$

El punt $(3, 2, 3)$ pertany a la recta.

4. Una possible solució és

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 13 \\ y + 3z = 7 \end{array}\right\}.$$

5. Una possible solució és

$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + \lambda(1, 0, -3) + \mu(0, 1, 4)\,.$$

6. Una possible solució és

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 5 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{array}\right\}.$$

7. $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = z$.

8. Són equacions implícites de la recta els sistemes (b), (d), (e) i (f).

9. Les equacions són:

Equació vectorial	$(x, y, z) = (3, 1, 2) + t(-1, 1, 1) + s(2, 1, 2)$
Equacions paramètriques	$\left.\begin{array}{r} x = 3 - t + 2s \\ y = 1 + t + s \\ z = 2 + t + 2s \end{array}\right\}$
Equació implícita	$x + 4y - 3z = 1$.

10. $\left.\begin{aligned} x &= 1+t+5s \\ y &= 1+3s \\ z &= -3+3t \end{aligned}\right\}$

11. El quatre punts són coplanaris i el pla que els conté té equació $2x+13y+4z=2$.

12. $\alpha = 13$.

13. $\left.\begin{aligned} x &= -3 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$

14. $5x-3y-z=10$.

15. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-2}{7}$.

16. La projecció ortogonal és $p' = (-2,3,-1)$ i el simètric $p^* = (2,-9,6)$.

17. (a) $p' = (2,3,3)$ i $p^* = (0,7,1)$. (b) $p' = (4,1,-1)$ i $p^* = (-2,-5,2)$. (c) $p' = (-3,3,3)$ i $p^* = (-1,9,-3)$. (d) $p' = (-1,3,-2)$ i $p^* = (2,0,4)$.

18. (a) Són estrictament secants. (b) La recta està continguda en el pla. (c) Són estrictament paral·lels.

19. (a) S'encreuen.
(b) Una possible solució és

$$(x,y,z) = (3,-8,-9) + \lambda(1,3,4) + \mu(-7,5,-2)\,.$$

(c) Una possible solució és

$$\left.\begin{aligned} 5x+9y-8z &= 15 \\ x+7y+14z &= 55 \end{aligned}\right\}.$$

20. (a) Si $m \neq 1,2$ els tres plans són secants i es tallen en un únic punt. (b) Si $m=1$, els tres plans formen un prisma. (c) Si $m=2$, els plans p_1 i p_3 són coincidents i $p2$ els talla en una recta.

21. Si $k \neq -8,-3$ els tres plans són secants i es tallen en un únic punt. (b) Si $k=-8$, els tres plans formen un prisma. (c) Si $k=-3$, els plans p_1 i p_2 són paral·lels estrictes i $p3$ els talla cada un dels altres dos en una recta.

22. (a) $d = \sqrt{3}$. (b) $x+3y-2z=-7$. (c) $(1,-2,1)$ i $(2,-3,0)$, respectivament.

23. a) $(d = \dfrac{10\sqrt{11}}{11}$. (b) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-3}$. (c) $\left(-\frac{10}{11}, \frac{1}{11}, \frac{30}{11}\right)$ i $\left(-\frac{20}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{60}{11}\right)$, respectivament.

24. (a) No són perpendiculars; i l'angle és $\dfrac{\pi}{3}$. (b) No són perpendiculars; i l'angle és $\dfrac{\pi}{6}$. (c) Són perpendiculars.

25. (a) $d=2$. (b) $d = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$. (c) 0.

26. (a) $\frac{8\sqrt{17}}{51}$. (b) $\dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z+1}{2}$.

27. L'ortocentre és el punt $(-3,-6,4)$.

28. El circumcentre és el punt $\dfrac{1}{2}(5,1,-1)$.

29. Sí és referència; i les coordenades són $(0,1,2)$.

30. Són estrictament secants; i es tallen en el punt $(4,4,-1)$.

31. $\left.\begin{aligned} x' &= \dfrac{2x''+2y''}{3} \\ y' &= \dfrac{-6-5x''+y''}{3} \end{aligned}\right\}.$
$(3,0) = (0,0)_{\mathcal{R}''} = (0,-2)_{\mathcal{R}'}$.

32. $p = (-12,-24,3)_{\mathcal{R}''}$.

33. $7x'+5y' = -6$.

34. $x + y - 3z = 1$.

35. $4x' - 3y' - 3z' = 40$.

36. $\mathcal{R}' = \{(-2,3,-2); (-3,1,-1), (-2,-2,-1), (-2,-1,-1)\}$.

37. Si escollim la referència $\mathcal{R}' = \{(1,-2); (4,1), (-1,2)\}$, P és el paral·lelogram de vèrtexs $(0,0)_{\mathcal{R}'}$, $(1,0))_{\mathcal{R}'}$, $(1,3)_{\mathcal{R}'}$, i $(0,3)_{\mathcal{R}'}$. Dit d'una altra manera,

$$P = \{(x', y')_{\mathcal{R}'} \quad \text{tals que} \quad 0 \le x' \le 1\,, \quad 0 \le y' \le 3\}\,.$$

L'àrea és $A = 27$.

38. (a) $C = (-1,3)$ i $r = 3$. (b) $C = (-2,4)$ i $r = \sqrt{5}$. (c) $C = (3,-4)$ i $r = \sqrt{8}$. (d) $C = (-2,-3)$ i $r = 4$.

39. L'equació és $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, el centre $C = (-2,3)$ i el radi $r = 5$.

40. $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21$.

41. Els semieix major és $a = 4$, el semieix menor $b = 2\sqrt{2}$ i els focus $(0, 2\sqrt{2})$ i $(0, -2\sqrt{2})$.

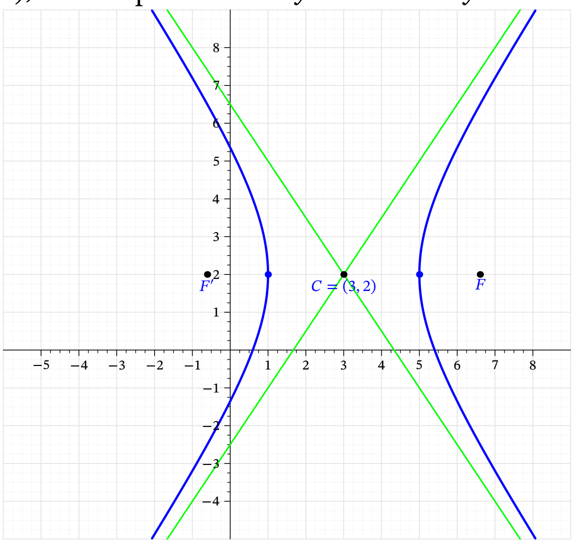
42. La semidistància focal és $c = \sqrt{12}$. Les seves asímptotes tenen equacions $x + \sqrt{3}\,y = 0$ i $x - \sqrt{3}\,y = 0$.

43. Les rectes tangents son $x + y = 6$ i $x - 7y = 14$

44. Són els punts $(1,1)$ i $(-3,9)$. El paràmetre és $p = \frac{1}{2}$ i el focus és el punt $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

45. $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

46. Els vèrtexs són $(5,2)$ i $(1,2)$, les asímptotes $3x - 2y = 5$ i $3x + 2y = 13$ i el gràfic



47. (a) El centre és $C = (3,-1)$, els semieixos $a = 2$ i $b = 3$ i la semidistància focal $c = \sqrt{13}$. (b) $C = (1,-2)$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$ i $c = 2\sqrt{3}$. (c) $C = (-2,0)$, $a = 2$. $b = 3$ i $c = \sqrt{13}$. (d) $C = (-4,3)$, $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ i $c = \sqrt{10}$.
Observació: l'equació de les dues últimes és de la forma

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,,$$

és a dir, a sempre és el semieix real i b és el semieix imaginari.

48. $6x'^2 - 4x'y' + 9y'^2 - 20 = 0$.

49. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

50. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

51. (a) Paraboloide el·líptic. (b) Hiperboloide d'una fulla. (c) Hiperboloide d'una fulla. (d) Con. (e) Cilindre el·líptic. (f) Cilindre parabòlic.

52. L'equació és $x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = 0$ i la quàdrica és un con.

53. L'equació en la referència canònica és $2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 4xy - 6xz + 6yz - 18x - 2y + 2z - 12 = 0$.

54. L'àrea és $A = 2\sqrt{14}$.

55. El volum és $V = \dfrac{64\pi}{3}$.

56. Les equacions implícites dels dos plans són $3x - 7y + 2z = 33$ i $3x - 7y + 2z = -91$.

57. Els semieixos són $a = 2$ i $b = 3$.

58. $a = \sqrt{2}$ i $b = 2$.

59. L'equació del con és $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$, o bé, $x^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 0$.

60. L'equació de l'hiperboloide d'una fulla és $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$.

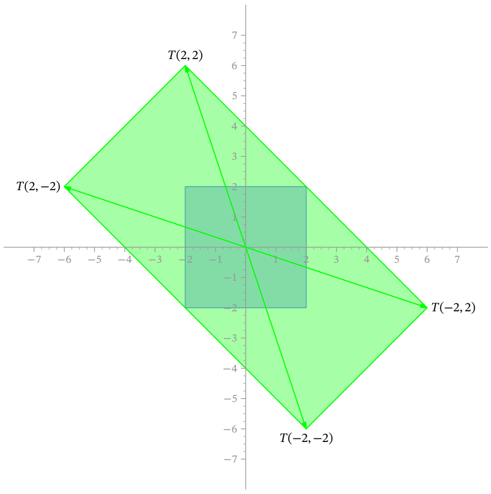
61. L'equació de la superfície de revolució és $16x^2 + 16y^2 - \left(z^2 - 8\right)^2 = 0$.

8.5 Transformacions lineals i afins

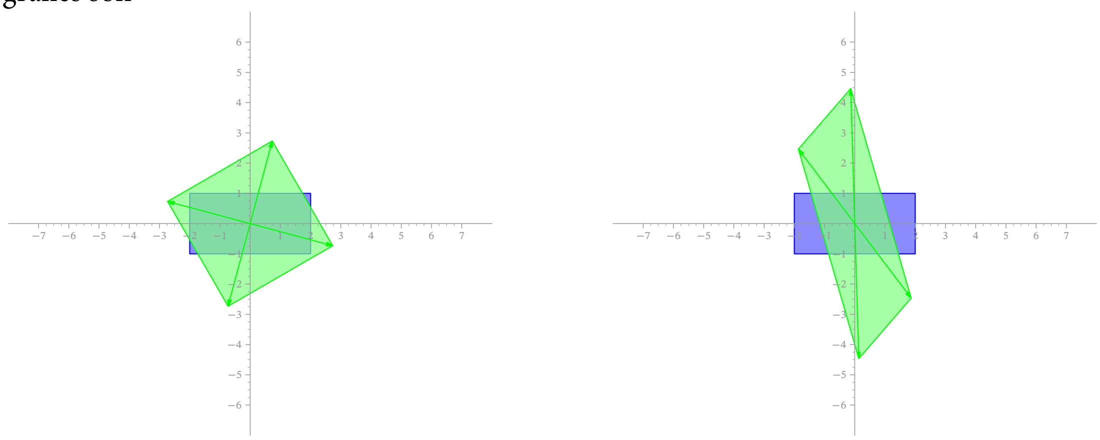
1. (a) $T_1(2,3) = (9,8)$, $T_1(-1,2) = (-1,10)$ i $T_1(4,-1) = (11,-12)$. (a) $T_2(2,3) = (-5,5)$, $T_2(-1,2) = (-8,1)$ i $T_2(4,-1) = (11,3)$.

2. $T(3,1,-1) = (6,2,14)$, $T(1,-2,-1) = (1,1,3)$ i $T(1,-4,1 = (-5,9,-1)$.
El vector $(1,1,-1)$ no té antiimatges. $T^{-1}(-2,6,2) = \left\{\frac{1}{3}(4-z, -10+7z, 3z) \quad \text{amb} \quad z \in \mathbb{R}\right\}$.

3. La representació gràfica és

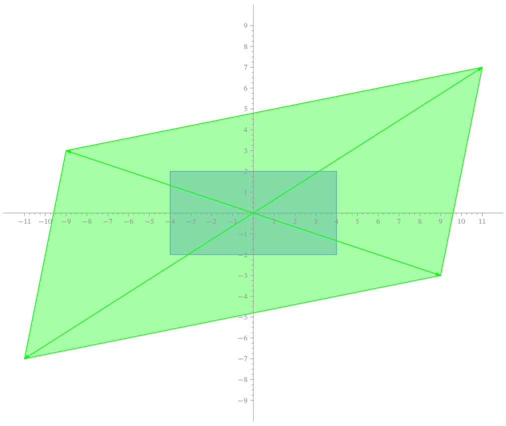


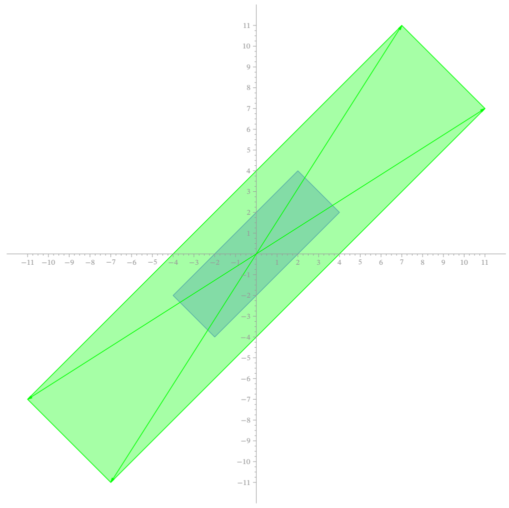
4. (a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Els gràfics són



5. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Els gràfics són





7. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 9 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

8. Les expressions en la base $\mathcal{B}' = \{(1,2),(1,-1)\}$ són

(a) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 7 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

9. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 9 \\ -5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -8 & 4 & -1 \\ -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
$\psi = 209.745°$, $\theta = 63.612°$ i $\phi = 82.875°$.

13. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
$\psi = 33.690°$, $\theta = 31.003$ i $\phi = 303.690$.

14. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

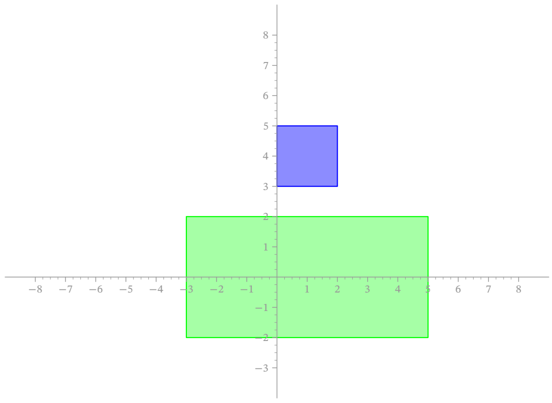
15. $pq = -1 + 3i + 9j + 3k$, $qp = -1 - 9i + 3j + 3k$, $pq^* = 5 - 5i - 5j - 5k$, $q^*p = 5 + 7i + j - 5k$ i $pqp^* = 10 + 20i + 20j - 10k$.

16. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

17. Es tracta de la rotació de 90° al voltant del vector $(1, 2, -2)$. El quaternió és $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}(i + 2j - 2k)$.

18. Es tracta de la rotació de 60° al voltant del vector $(1, -1, -1)$.

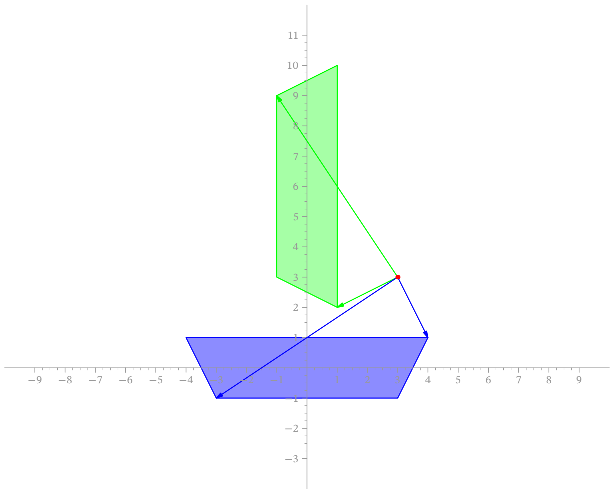
19. La representació gràfica és



El punt $(1, 8)$ és un punt fix.

20. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

El gràfic és



21. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 + 5\sqrt{2} \\ 12 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

24. Es tracta de la rotació de 120° al voltant de la recta d'equació contínua

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

25. Es tracta de la rotació de 60° al voltant de la recta d'equació contínua

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$$

seguida d'una translació de $(4,-4,-4)$.

26. (a) El moviment helicoïdal ve donat per

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

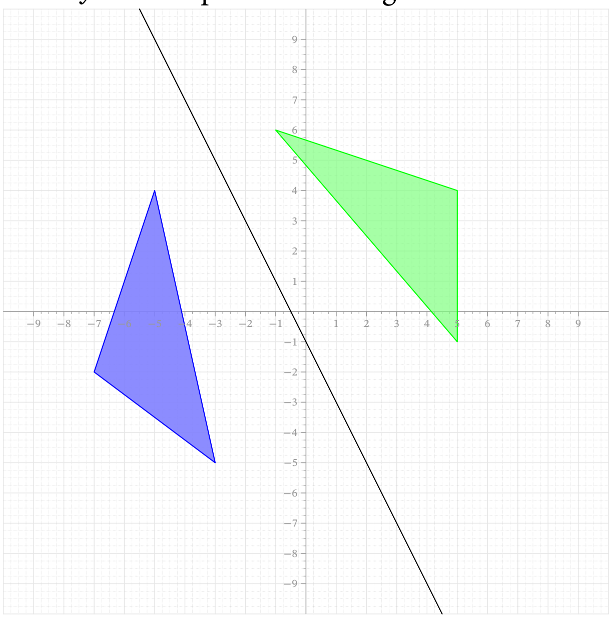
(b) Els angles d'Euler són $\psi = 90°$, $\theta = 90°$ i $\phi = 0°$.

27. La representació és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6-\sqrt{6} \\ 3+5\sqrt{6} \\ 3-7\sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & -3 \\ -\sqrt{6} & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

28. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$T(1,-2) = (10,-1)$ i $T(1,-2) = T(0,0)_{\mathcal{R}'} = (5,-4)_{\mathcal{R}'} = (10,-1)$.

29. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Tots els punts de la recta $2x+y+1$ són punts fixos. El gràfic és



8.6 Diagonalització

1. Les solucions són

(a) $\mathcal{B}' = \{(-1,1),(2,-3)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(b) $\mathcal{B}' = \{(-1,-1),(-2,-1)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(c) $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(-2,1)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(d) $\mathcal{B}' = \{(-1,-1),(-1,-2)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

2. Les solucions són

(a) $\mathcal{B}' = \{(-1,-1,1),(0,-1,3),(-1,-3,6)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

(b) $\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,0,1),(-1,-2,0)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

(c) $\mathcal{B}' = \{(1,-1,0),(3,-4,-1),(2,-3,-2)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

(d) $\mathcal{B}' = \{(1,0,-1),(0,-1,-1),(3,2,-2)\}$. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

3. Les solucions són

(a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (f) $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

4. Les solucions són

(a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

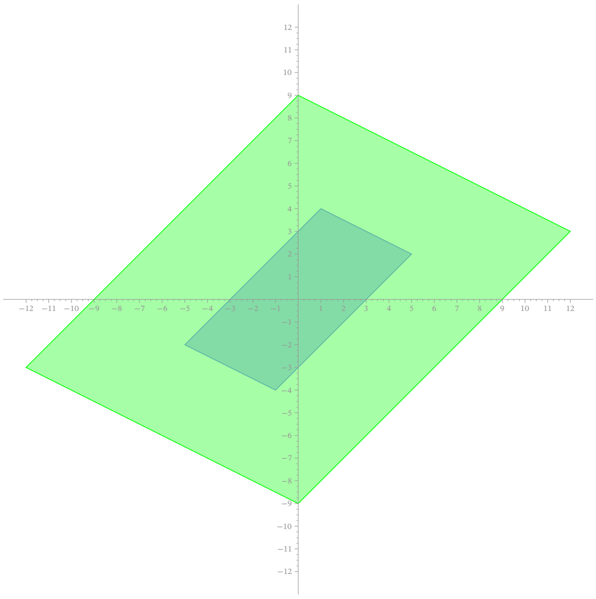
5. $\vec{u}_5$ és un vectors propi de T amb valor propi -3, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_4$ i $\vec{u}_6$ són vectors propis amb valor propi -2 i, finalment, $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ no són vectors propis de T.

6. $\mathcal{B}' = \{(1,1,3),(1,1,2),(2,3,5)\}$ i $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. $\mathcal{B}' = \{(1,1), (-2,1)\}$ i la representació de T en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La representació gràfica és



8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. (a) No és diagonalitzable perquè té el valor propi $\lambda_1 = 3$ amb multiplicitat 2 i la matriu no és múltiple de la matriu unitat. (b) No és diagonalitzable sobre els reals ja que els seus valors propis són nombres complexos conjugats. És diagonalitzable sobre els complexos. (c) No és diagonalitzable perquè té el valor propi $\lambda_1 = 1$ amb multiplicitat 2 i la matriu no és múltiple de la matriu unitat.

10. (a) És diagonalitzable. $\mathcal{B}' = \{(1,-1,0), (0,1,-1), (1,-1,1)\}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) No és diagonalitzable. (c) No és diagonalitzable.

11. $\mathcal{B}' = \{(1,1), (3,2)\}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Una possible base de vectors propis és $\mathcal{B}' = \{(0,0,1), (1,-1,0), (1,1,0)\}$ i l'expressió de T en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

13. $\mathcal{B}'' = \{(-2,1), (-5,3)\}$ i $\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.

14. Els coeficients són $a = 4$ i $b = -5$; i la matriu diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ i $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

16. $\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) \right\}$ i $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

17. $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$ i $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

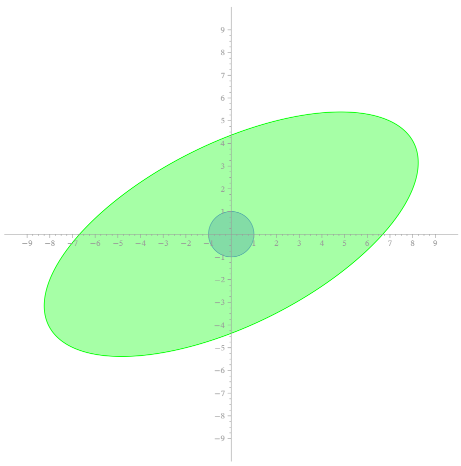
19. $C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right\}$ i $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Sí. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. El gràfic és



24. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

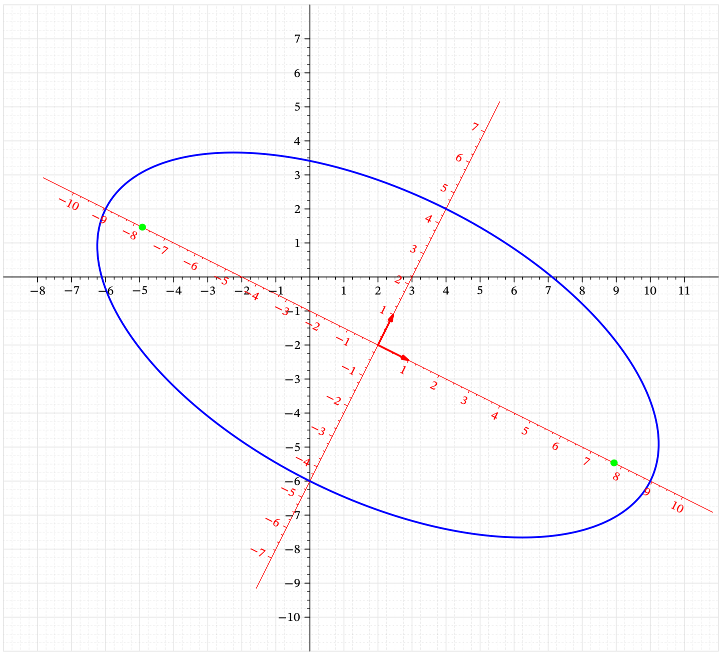
25. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8.7 Còniques i quàdriques

1. $\mathcal{R}' = \left\{(2,-2)\,; \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x^2}{80} + \frac{y'^2}{20} = 1\,.$$

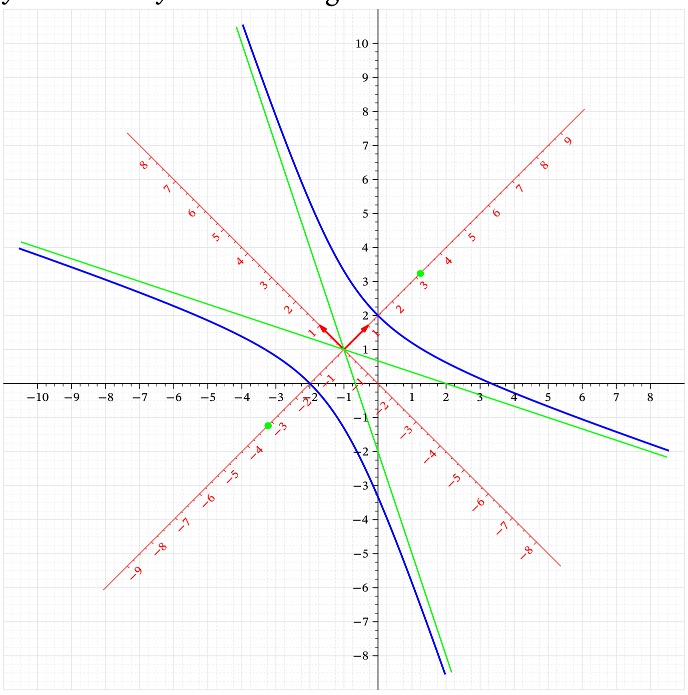
L'equació en la referència canònica és $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 8x + 44y - 348 = 0$ i la gràfica



2. $\mathcal{R}' = \left\{(-1,1)\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y'^2}{8} = 1\,.$$

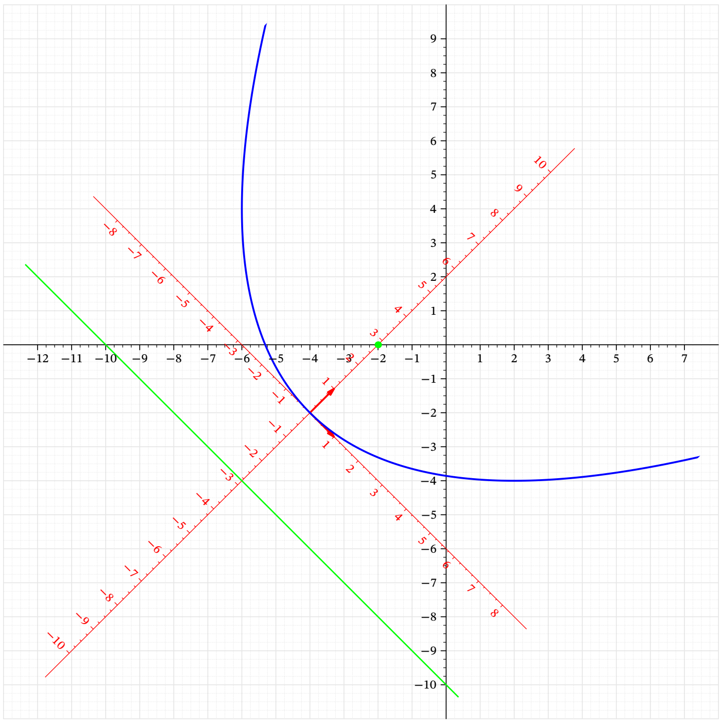
L'equació en la referència canònica és $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x + 4y + 20 = 0$ i les equacions de les asímptotes són $x + 3y = 2$ i $3x + y + 2 = 0$. La gràfica és



3. $\mathcal{R}' = \left\{(-4,-2)\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$y' = \frac{x'^2}{8\sqrt{2}}$$

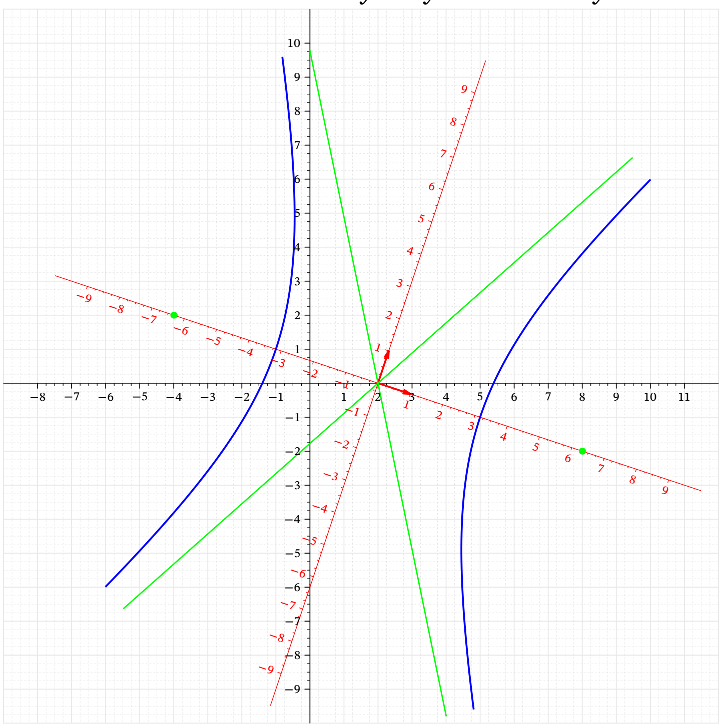
L'equació en la referència canònica és $x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 20y - 92 = 0$ i la gràfica és



4. $\mathcal{R}' = \left\{(2,0)\,;\,\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1),\,\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{30} = 1\,.$$

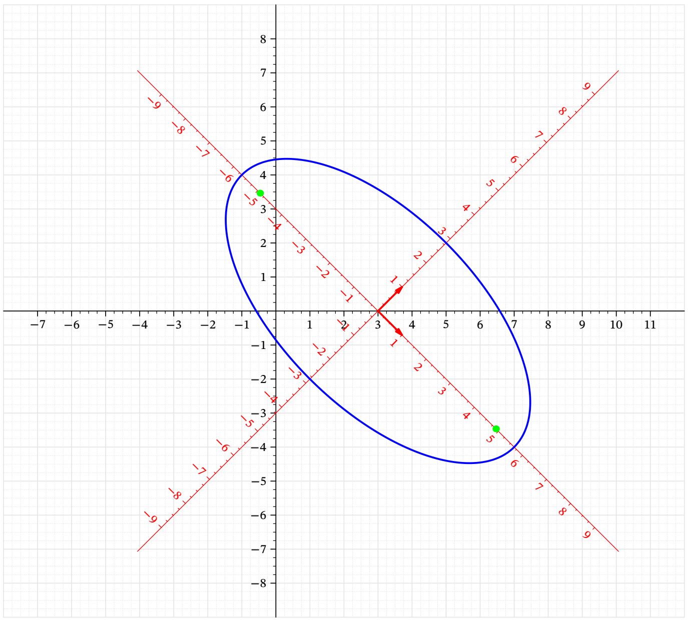
L'equació en la referència canònica és $13x^2 - 12xy - 3y^2 - 52x + 24y - 98 = 0$ i la gràfica és



5. $\mathcal{R}' = \left\{(3,0)\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y'^2}{8} = 1\,.$$

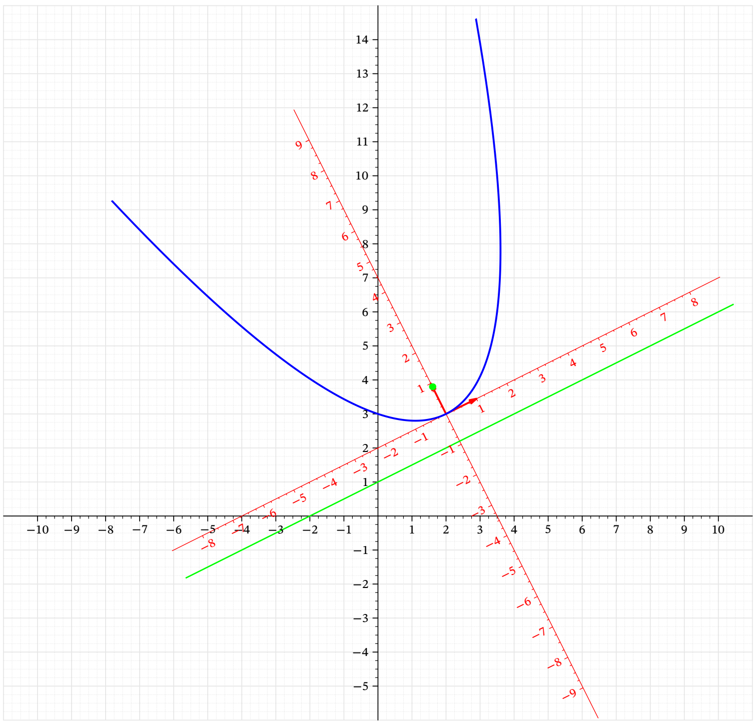
L'equació en la referència canònica és $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 30x - 18y - 19 = 0$ i la gràfica



6. $\mathcal{R}' = \left\{(2,3); \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right\}$. L'equació reduïda és

$$y' = \frac{5x'^2}{8\sqrt{5}}.$$

L'equació en la referència canònica és $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x - 30y + 81 = 0$ i la gràfica



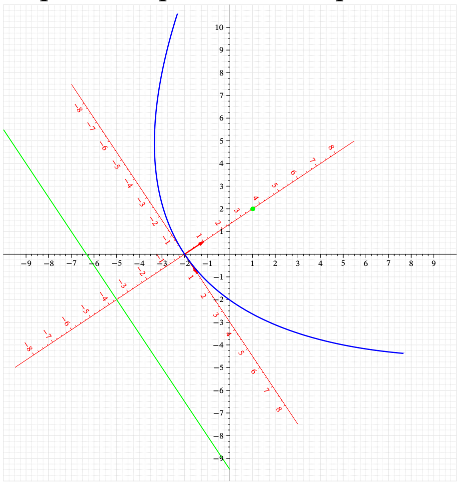
7. (a) És una paràbola. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(-2,0); \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3), \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)\right\}$ i l'equació reduïda

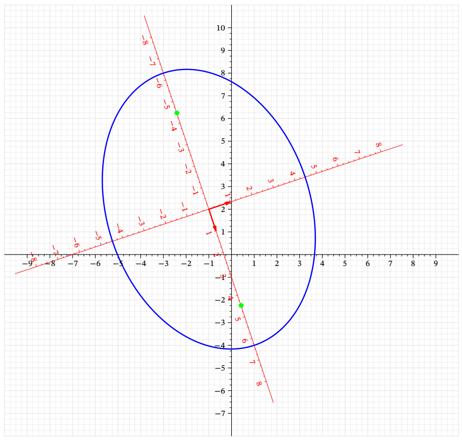
$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{13}}.$$

(b) És una el·lipse. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(-1,2)\,;\, \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3),\, \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)\right\}$ i l'equació reduïda

$$\frac{x'^2}{40} + \frac{y'^2}{20} = 1\,.$$

Les gràfiques de la paràbola i l'el·lipse són





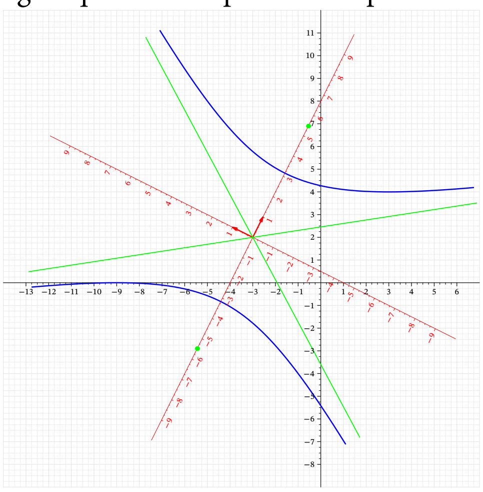
8. (a) És una hipèrbola. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(-3,2)\,;\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2),\, \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\right\}$ i l'equació reduïda

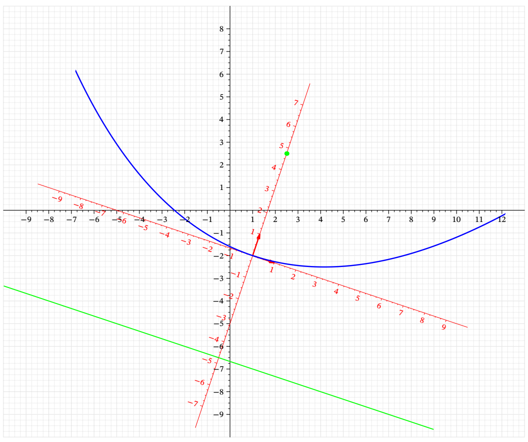
$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{20} = 1\,.$$

(b) És una paràbola. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(1,-2)\,;\, \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1),\, \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right\}$ i l'equació reduïda

$$y' = \frac{x'^2}{6\sqrt{10}}\,.$$

Les gràfiques de la hipèrbola i la paràbola són





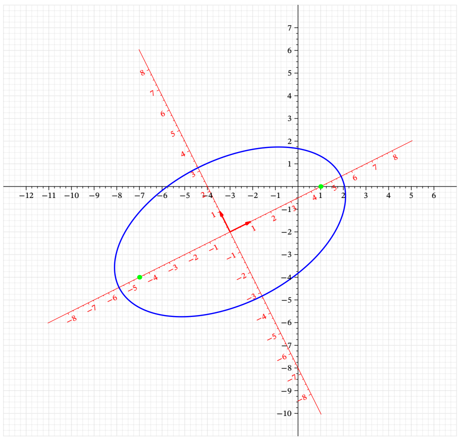
9. (a) És una el·lipse. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(-3,-2)\,;\, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),\, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right\}$ i l'equació reduïda

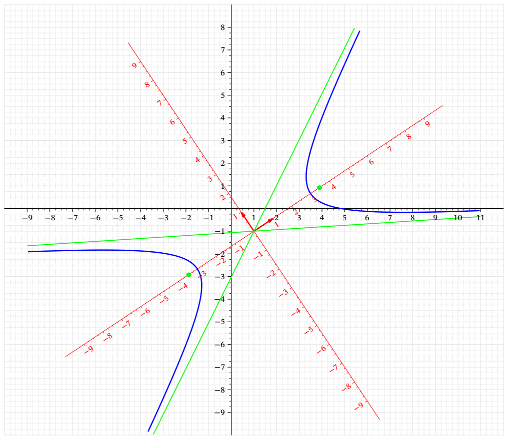
$$\frac{x'^2}{30} + \frac{y'^2}{10} = 1\,.$$

(b) És una hipèrbola. La referència principal és $\mathcal{R}' = \left\{(1,-1)\,;\, \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2),\, \frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)\right\}$ i l'equació reduïda

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{3} = 1\,.$$

Les gràfiques de l'el·lipse i la hipèrbola són





10. El focus és el punt $(2,0)$ i la recta directriu té equació $2x - y + 16 = 0$.

11. Els focus són $(2,-3)$ i $(-6,5)$ i els vèrtexs $(3,-4)$, $(1,4)$, $(-7,6)$ i $(-5,-2)$.

12. Els seus vèrtexs són els punts $(7,4)$ i $(1,-2)$ i les asímptotes tenen equacions $x - 5y + 1 = 0$ i $5x - y = 19$.

13. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 7xy - 7xz - 7yz - 15x - 30y + 45z + 120 = 0$.

14. $4x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 28x + 30y + 16z + 63 = 0$.

15. $2x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 12xz - 12yz + 36x - 4y + 4z - 98 = 0$.

16. (a) És un cilindre el·líptic. $\mathcal{R}' = \left\{(-4,3,1)\,;\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2),\, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{18} + \frac{y'^2}{8} = 1\,.$$

(b) És un con. $\mathcal{R}' = \left\{(-3,3,3);\, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0),\, \frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,-5),\, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{6} + y'^2 - z'^2 = 0\,.$$

17. (a) És un hiperboloide de dues fulles de revolució. $\mathcal{R}' = \left\{(2,4,1);\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2),\, \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-5,-1),\, \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{8} - \frac{z'^2}{4} = -1\,.$$

(b) És un cilindre parabòlic. $\mathcal{R}' = \left\{(-4,-4,1);\, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1),\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right\}$. L'equació reduïda és

$$z' = \frac{3x'^2}{4\sqrt{6}}\,.$$

18. (a) És un paraboloide hiperbòlic. $\mathcal{R}' = \left\{(-1,2,3);\, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),\, \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$z' = \frac{x'^2}{3\sqrt{6}} - \frac{y'^2}{\sqrt{6}}\,.$$

(b) És un con. $\mathcal{R}' = \left\{(-2,2,1)\,;\, \frac{1}{3}(1,2,2), \frac{1}{3}(2,1,-2), \frac{1}{3}(-2,2,-1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 - z'^2 = 0\,.$$

19. (a) És un el·lipsoide de revolució. $\mathcal{R}' = \left\{(3,3,1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{4} = 1\,.$$

(b) És un paraboloide el·líptic. $\mathcal{R}' = \left\{(4,-2,-2); \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)\right\}$. L'equació reduïda és

$$z' = \frac{x'^2}{10\sqrt{2}} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}}\,.$$

20. (a) És un hiperboloide d'una fulla. $\mathcal{R}' = \left\{(1,2,-3)\,;\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{50} + \frac{y'^2}{25} - \frac{z'^2}{25} = 1\,.$$

(b) És un cilindre hiperbòlic. $\mathcal{R}' = \left\{(0,-2,3); \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{3} = 1\,.$$

21. (a) És un cilindre el·líptic. $\mathcal{R}' = \left\{(2,1,-2); \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1), \frac{1}{\sqrt{22}}(2,-3,3), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{4} = 1\,.$$

(b) És un hiperboloide de dues fulles. $\mathcal{R}' = \left\{(-4,-3,2); \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)\right\}$. L'equació reduïda és

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{16} = -1\,.$$